

Modellierung der Einwirkung auf ein Silo bei exzentrischer Entleerung

Von der
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

von
Ding Cai
geboren am 10. Juli 1988
aus Yueyang (China)

Eingereicht am: 09.06.2018

Disputation am: 13.12.2018

Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr. sc. Techn. Klaus Thiele
Prof. Dr.-Ing Dieter Dinkler

Vorwort

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr. sc. techn. Klaus Thiele für seine Unterstützung und Förderung in den letzten Jahren, sowie für die Übernahme des Referates. Durch ihn konnte ich meine ingenieurmäßige Denkweise vertiefen. Außerdem danke ich ihm für das mir entgegenbrachte Vertrauen und die gewährten Freiräume für die Gestaltung der Arbeit. Ohne ihn wäre diese Arbeit nicht zustande gekommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler und Frau Prof. Dr.-Ing. Laura de Lorenzis danke ich herzlich für Ihr Interesse an der Arbeit und die Übernahme des Koreferats. Herrn Prof. Dr.rer.nat Hans Matthias Schöniger bin ich für die Übernahme des Vorsitzes für die Prüfungskommission einen Dank verpflichtet.

Herrn Dr.-Ing Martin Kaldenhoff von der HHW Gesellschaft Beratende Ingenieure mbH danke ich für die Initiierung des Forschungsvorhabens, die kontinuierlich andauernde Diskussionsbereitschaft, die aufgebrachte Zeit, sowie die tiefgehenden, fachlichen Diskussionen, die zum Entstehen dieser Arbeit viel beigetragen haben.

Konrad Ritter, Cong Chen, Jonas Pons, Anzhi Wang, Niccolo Wiczorek, Hendrik Jahn, Dr.-ing Julian Unglaub, Dr.-Ing. Florian Minuth-Hadi, Dr.-Ing Thomas Höbbel, Dr.-Ing. Hodei Aizpurua Aldasoro, Prof. Dr.-Ing. Mathias Clobes, Dr.-Ing. Matthias Reininghaus danke ich für das angenehme Arbeitsumfeld und die stets aufmunternden Worte. Die guten 4 Jahre am Institut werden mir in bester Erinnerung bleiben, besonders die gemeinsamen Rennradtouren im Harz, sowie um und über den Elm.

Mein größter Dank gilt meinen Eltern. Ihnen danke ich von Herzen für die Möglichkeit eines Studiums in Deutschland, die uneigennützigste Liebe und fortwährende Unterstützung darüber hinaus. Meiner Frau Benyu danke ich für ihre Geduld, ihr Verständnis und den liebevollen Rückhalt. Die größte Freude hat mir die Geburt unserer Tochter Mila während der Promotion bereitet.

Braunschweig, im Januar 2019

Ding Cai

Kurzfassung

Silobauwerke weisen hohe Schadensraten auf. Besonders bei Silos mit exzentrisch angeordneter Auslauföffnung stellt die Bemessungssituation für die planenden Ingenieure immer noch eine Herausforderung dar. Das Ingenieurmodell nach Rotter für die Entleerung von Silos mit großen Exzentrizitäten, das in der aktuellen Norm Anwendung findet, wurde unter Anwendung der Scheibenelementmethode nach Janssen entwickelt. Der auf vereinfachten Annahmen beruhende Ansatz hat sich in der Ingenieurpraxis als unzulänglich erwiesen. Die künstlich erzeugten, nicht membrangerechten und unrealistischen Beanspruchungen können nicht über den Membranzustand abgetragen werden. Im Fall von Metallsilos ergibt sich bei strenger Anwendung der Regeln eine kaum noch zu beherrschende Bemessungssituation. Daher ist eine genaue Erfassung der unsymmetrischen Belastungen von Silokonstruktion für eine wirtschaftliche und sichere Auslegung von vitalem Interesse.

Die Modellierung eines Schüttgutes gilt immer als große Herausforderung in der Numerik. Die Gründe dafür sind zum einen, dass mit einer großen Verformung zu rechnen ist, wenn das Schüttgut in Bewegung ist. Dies führt in der herkömmlichen FEM, basierend auf der Lagrange-schen Formulierung, zu Schwierigkeiten. Zum anderen ist die Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens eines Schüttgutes sehr komplex. In dieser Arbeit werden mit Hilfe neuer numerischer Methoden die Entleerungsvorgänge in Silos simuliert, womit eine längere Entleerungszeit und somit der stationäre Zustand erreicht wird. Die Simulationsergebnisse stimmen sehr gut mit den Versuchsergebnissen überein. Dabei stehen die berechneten Wanddrücke in großem Kontrast zu den nach der Norm berechneten Werten. In DIN EN 1991-4 wird lediglich das Fließprofil eines Schlotflusses parallel zur Silowand berücksichtigt. Das numerisch ermittelte Fließprofil für Weizen zeigt ein gemischtes Fließen und für Sand einen inneren Schlotfluss, dessen Fließkanalgrenze sich bis zur Schüttgutoberfläche erstreckt. Die unterschiedlichen Fließprofile führen zu unterschiedlichen Spannungsumlagerungen sowie Wanddrücken. Dahingehend werden aktuell in der DIN EN 1991-4 keine Unterscheidungen gemacht und es bedarf damit einer Berücksichtigung.

Stabilitätsuntersuchungen mit den simulierten Lasten und den Normlasten zeigen, dass die Tragfähigkeit von Silos bei exzentrischer Entleerung nach dem Normansatz deutlich unterschätzt wird. Für Silos unter einer realistischen Beanspruchung wird das global entstehende

Biegemoment neben den erhöhten Wandreibungslasten als Ursache für das axiale Beulen identifiziert. Ein ingenieurmäßiger Ansatz zur Beschreibung des Wanddrucks wird herangezogen. Mittels einer Parameterstudie wird exemplarisch der Ansatz für Weizen bei einer Schlankheit von 3 abgeleitet. An einem Silo wird die Auswirkung des neuen Ansatzes auf die Bemessung untersucht, dabei zeigen die Berechnungen mit dem neuen Ansatz gegenüber dem Normansatz für die drei Beulsicherheitsnachweise eine wesentlich bessere Abbildung des realen Tragverhaltens auf. Des Weiteren kann ein Silo mit dem Ansatz aufgrund seiner einfachen Handhabung sowohl wirtschaftlich als auch sicher ausgelegt werden.

Abstract

Silo structures tend to comprise high damage rates. Especially silos with an eccentrically arranged outlet still imply a major challenge for the planning engineers in the process of the design situation. The engineering model by Rotter for highly eccentric discharge, which is applicable within the current European Standard EN 1991-4 (2010), was developed using the slice element method of Janssen. However, the approach based on simplified assumptions turned out to be deficient in engineering practice. The artificially produced, non-membrane adequate and unrealistic loads cannot be ablated over the membrane condition. In case of metal silos, this results in a barely controllable design situation under strict application of the criteria. Thus, an accurate description of the asymmetric loads of silo constructions is of vital interest for a safe and economic design.

The modelling of bulk material is always considered as a major challenge in numerical analysis. The reasons on the one hand are that there is likely to be a great distortion when the bulk material is in motion. This leads to difficulties within the conventional FEM based on the Lagrangian formulation. On the other hand, the specification of non-linear material behavior of bulk material is very complex. Within this thesis, the emptying processes are simulated with the help of new numerical methods, which consequently leads to a longer discharge process and a stationary state is therefore reached. The simulation results show good correlation to the test results. Hence, the calculated wall pressures are contrary to the calculated values considering the standard. DIN EN 1991-4 only considers the flow profile of a chimney flow parallel to the silo wall. The numerically determined flow profile for wheat shows a mixed flow and for sand an eccentric taper pipe flow, whose flow channel boundary ranges up to the bulk material surface. The various flow profiles lead to different stress redistributions as well as wall pressures. However, no distinctions are currently made within the DIN EN 1991-4, which requires further consideration.

Stability investigations with the simulated loads and the standard loads implicate that the load capacity of silos under eccentric discharge according to the standard are being significantly underestimated. For silos under a realistic load, the globally resulting bending moment as well as the increased wall friction loads are considered to be the causes of axial buckling. An engineering approach to specify the wall pressure is obtained. By means of a parameter study, an

approach for wheat at a slenderness of 3 is exemplarily derived. The impact of the new approach on the design is examined on a silo. Consequently, the calculations using the new approach compared to the standard approach considering the there design concepts for the verification of shell stability show a considerably improved reflection of the real structural behavior. Furthermore, due to its ease of use, this approach enables a safe and economic design of a silo.

Inhalt

Symbole	iii
Glossar	ix
1 Einführung	1
1.1 Motivation und Zielsetzung	1
1.2 Gliederung der Arbeit	2
2 Exzentrische Entleerung von Silos	5
2.1 Allgemeines	5
2.2 Entwicklung der Lastansätze für die Praxis	7
2.2.1 Gleichmäßige Lasten	7
2.2.2 Teilflächenlast	9
2.2.3 Entleeren mit großen Exzentrizitäten: das Modell nach Rotter	10
2.3 Diskussion der aktuellen Normvorschrift	13
2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung	18
2.4.1 Beulsicherheitsnachweise nach DIN EN 1993-1-6	20
2.4.2 Numerisches Berechnungsmodell	26
2.4.3 Stabilitätsuntersuchung unter symmetrischer Entleerung	28
2.4.4 Stabilitätsuntersuchung unter exzentrischer Entleerung	34
3 Simulationsmethoden und Materialmodelle	41
3.1 Überblick	41
3.2 Numerische Methoden	42
3.3 Numerische Modellierungstechnik zur Siloentleerung	43
3.4 Gewählte Methoden: Die ALE- und CEL-Methode	45
3.4.1 ALE-Methode	47
3.4.2 CEL-Methode	50
3.5 Lösungsmethoden: das implizite und explizite Verfahren	52
3.6 Kontakt	54
3.6.1 Reibungsmodell	54
3.6.2 Penalty-Methode	55

3.6.3	Kontaktmodellierung mit ALE und CEL	57
3.7	Materialmodelle für granulare Medien	58
3.7.1	Elasto-plastisches Stoffgesetz nach Drucker-Prager	59
3.7.2	Hypoplastisches Stoffmodell	61
4	Numerische Simulation	63
4.1	Simulation des Fülldrucks	63
4.2	Vergleich der ALE- und CEL-Methode	66
4.2.1	Numerische Umsetzung	66
4.2.2	Vergleich der Ergebnisse	67
4.3	Einfluss der Auszugsgeschwindigkeit und Auslauföffnung	72
4.4	Vergleich der Elasto-Plastizität und der Hypoplastizität	76
4.4.1	Vergleich der UMAT- und VUMAT-Subroutinen für die Hypoplastizität	76
4.4.2	Ergebnisse der Füll- und Entleerungsberechnungen beider Stoffmodelle	79
4.5	Interaktion zwischen dem Schüttgut und der Silowand	83
5	Validierung der Füll- und Entleerungsberechnungen	89
5.1	Experimentalsilos	89
5.2	Numerische Simulation der Versuche	90
5.3	Füllzustand	91
5.4	Entleerungszustand	93
6	Exzentrische Entleerung und Diskussion	97
6.1	Silogeometrien und Eingangswerte	97
6.1.1	Simulationsergebnisse: Weizen und Sand	99
6.1.2	Einfluss der Exzentrizität	108
6.1.3	Einfluss der Schlankheit	111
6.1.4	Zusammenfassung	114
6.2	Tragverhalten und Schnittgrößen der Silowand	115
6.3	Beschreibung der Druckverteilung mittels eines mathematischen Ansatzes . . .	118
6.3.1	Zweidimensionale Beschreibung der Wanddrücke	119
6.3.2	Räumliche Beschreibung der Wanddrücke	122
6.4	Entwicklung eines Ingenieurmodells für die exzentrische Entleerung	124
6.5	Auswirkung des neuen Ansatzes auf die Bemessung	129
7	Zusammenfassung und Ausblick	135
	Literatur	139
	Anhang	149

Symbole

Diese Arbeit ist interdisziplinär angelegt, daher können Symbole, je nach Fachdisziplin, doppelt definiert sein. Um den jeweiligen Charakter der Fachdisziplin zu erhalten, erfolgt die Symboldefinition nach der fachspezifischen Konvention.

Geometrische Größen

θ	Zylinderkoordinate: Winkel in Umfangsrichtung
θ_c	Umfangswinkel des Fließkanals beim Entleeren bezogen auf die Mittelachse des Siloschaftes
A	Querschnittsfläche des vertikalen Schaftes
A_c	Querschnittsfläche des Fließkanals beim exzentrischen Entleeren
A_s	Querschnittsfläche des sich in Ruhe befindlichen Schüttgutes beim exzentrischen Entleeren
d_c	innerer Durchmesser des Querschnittes des vertikalen Siloschaftes
e_0	Exzentrizität des Mittelpunktes der Auslauföffnung
e_c	rechnerische Exzentrizität der Mittelachse des Fließkanals beim Entleeren mit großer Exzentrizität nach ROTTER
G	Verhältnis zwischen dem Radius des Fließkanals und dem Radius des inneren Querschnittes eines kreisförmigen Silos
h_c	Höhe der vertikalen Siloschaftes
r	äquivalenter Siloradius ($r = 0,5d_c$)
r_c	Radius des exzentrischen Fließkanals bei der Entleerung mit großen Exzentrizitäten
s	Abmessung der mit der Teilflächenlast belasteten Fläche
t	Dicke der Schalenwandung
U	innerer Umfang des Querschnittes des vertikalen Siloschaftes
U_{sc}	innere Umfangslänge des Fließkanals im Kontaktbereich zum nichtfließenden Bereich des Schüttgutes bei der Entleerung mit großen Exzentrizitäten

Symbole

U_{wc}	(innere) Umfangslänge des Fließkanals im Kontaktbereich mit der Silowand bei der Entleerung mit großen Exzentrizitäten
z	Tiefe unterhalb der äquivalenten Schüttgutoberfläche im gefüllten Zustand
z_{oc}	Tiefe nach der Janssen-Theorie für den Fließkanal bei der Entleerung mit großen Exzentrizitäten

Größen der Numerik

\mathbf{c}	konvektive Geschwindigkeitsvektor
c_d	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit
\mathbf{I}	innerer Lastvektor
L_e	charakteristische Elementlänge
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{p}	äußerer Lastvektor
Δt_{krit}	kritische Zeitinkrement
\mathbf{S}	Spannungsdeviator
\mathbf{T}	Spannungstensor
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
\mathbf{x}	eulersche Ortskoordinaten
\mathbf{X}	lagrangesche Ortskoordinaten

Größen zur Beschreibung der Silolasten

β	Ungleichgewichtsfaktor
μ	charakteristischer Wert des Wandreibungswinkels an der vertikalen Wand
ϕ_w	Wandreibungswinkel
ψ	Wandkontaktwinkel des exzentrischen Fließkanals bezogen auf die Mittelachse des Fließkanals
C_h	Lastvergrößerungsfaktor der horizontalen Entleerungslasten
C_w	Lastvergrößerungsfaktor für die Wandreibungslasten
K	Charakteristischer Wert des Horizontallasverhältnisses
μ_k	kinematischer Reibungskoeffizient
μ_s	statischer Reibungskoeffizient
p_{co}	asymptotische Vertikallast in großer Tiefe im Fließkanal bei einer Entleerung mit großen Exzentrizitäten

p_h	Horizontallast aus dem gespeicherten Schüttgut
p_{hae}	Horizontallast im sich in Ruhe befindlichen Bereich des Schüttgutes neben dem Fließkanal bei einer Entleerung mit großen Exzentrizitäten
p_{hce}	Horizontallast im Fließkanal bei einer Entleerung mit großen Exzentrizitäten
p_{hco}	asymptotische Horizontallast in großer Tiefe im Fließkanal bei einer Entleerung mit großen Exzentrizitäten
p_{hse}	Horizontallasten im sich in Ruhe befindlichen Schüttgut in größerem Abstand zum Fließkanal während einer Entleerung mit großen Exzentrizitäten
p_{pe}	Grundwert der Teilflächenlast während des Entleerens
p_{pei}	komplementäre Teilflächenlast beim Entleeren
p_{pes}	Teilflächenlast an der zylinderkoordinate θ bei dünnwandigen kreisförmigen Silos während der Entleerung
p_s	Vertikallast im sich in Ruhe befindlichen Bereich des Schüttgutes bei einer Entleerung mit großen Exzentrizitäten
p_{so}	asymptotische Vertikallast in großer Tiefe im sich in Ruhe befindlichen Bereich des Schüttgutes bei einer Entleerung mit großen Exzentrizitäten
p_v	Vertikallasten im Schüttgut
p_w	Wandreibungslasten entlang der vertikalen Wand
F_{pe}	resultierende Horizontallast aus den Teilflächenlast

Größen zur Beschreibung des Spannungszustandes

α	Faktor für elastische Imperfektionsabminderung beim Beulsicherheitsnachweis
α_{ov}	elastischer Imperfektionsabminderungsfaktor der Gesamtschale
α_{xpe}	elastischer Imperfektionsabminderungsfaktor mit Berücksichtigung der innendruckinduzierten elastischen Stabilisierung
β	Wert der größten örtlichen Verdrehung der Schalenoberfläche (in Bogenmaß), in Kapitel 2
β_{ov}	plastischer Bereichsfaktor der Gesamtschale
η_{ov}	Interaktionsexponent der Gesamtschale
$\bar{\lambda}$	bezogener Schalenschlankheitsgrad
χ	Beulabminderungsfaktor für elastisch-plastische Effekte beim Beulsicherheitsnachweis

Symbole

χ_{ov}	Beulabminderungsfaktor für die gesamte Schale
$\overline{\chi_{ov}}$	bezogener Schalenschlankheitsgrad der Gesamtschale
$\overline{\chi_{ov,0}}$	vollplastischer Grenzlankheitsgrad der Gesamtschale
σ_{cr}	ideale Beulspannung
$\sigma_{m,eq,Eq}$	Membranvergleichsspannung
C_x	Beulparameter zur Erfassung der Schlankheit
f_{yk}	charakteristischer Wert der Streckgrenze
n_x	Membrannormalkraft in Meridianrichtung
n_θ	Membrannormalkraft in Meridianrichtung
$n_{x\theta}$	Membranschubkraft
Q	Parameter zur Erfassung der Herstellqualität
r_{Rcr}	bezogener idealer Beulwiderstand (definiert als Lastfaktor auf die Bemessungslasten, ermittelt mit einer LBA-Berechnung)
r_{Rd}	bezogener Bemessungsbeulwiderstand
$r_{R,GMNA}$	bezogener elastisch-plastischer Beulwiderstand der perfekten Schale
$r_{R,GMNIA}$	bezogener elastisch-plastischer Beulwiderstand der imperfekten Schale
$r_{R,GMNIA,check}$	das Ergebnis der numerischen Berechnung für den Vergleichsbeulfall bzw. den Versuchsbeulfall
$r_{Rk,known,check}$	der bekannte charakteristische Werte des Vergleichsbeulfalles
$r_{R,test,known,check}$	das bekannte Versuchsergebnis
r_{Rpl}	bezogener plastischer Referenzwiderstand (definiert als Lastfaktor auf die Bemessungslasten, ermittelt mit einer MNA-Berechnung)
r_{Rpl}^*	bezogener plastischer Referenzwiderstand (vereinfacht ermittelt aus einer linearen Schalenberechnung)
Δw_k	charakteristische Imperfektionsamplitude

Stoffgrößen

α	Exponent wirkt auf den Peakreibungswinkel des Korngerüsts
β	Exponent wirkt auf die Spannungsrate durch den Spannungsmultiplikator
$\beta_r \ \& \ \chi$	Parameter der intergranularen Dehnung zur Streuung der Kontur der Steifigkeitsabnahme
ϕ_c	kritischer Reibungswinkel aus Schüttkegelversuch
ϕ_i	Winkel der inneren Reibung

$\phi_{i,DP}$	Innerer Reibungswinkel nach Druck-Prager
ν	Poissonzahl
ψ	Dilatanzwinkel
ρ	Wichte des gespeicherten Schüttgutes
d	Kohäsion
E	Elastizitätsmodul
e_{c0}	Porenzahl im kritischen Zustand beim Korndruck Null
e_{d0}	Porenzahl bei dichtester Lagerung
e_{i0}	Porenzahl bei lockerster isotroper Lagerung
h_s & n	Parameter zur Beschreibung des Kompressionsverhaltens
K	Fließflächenparameter
m_t & m_r	Parameter der intergranularen Dehnung zur Kontrolle der Steifigkeitserhöhung bei Änderung des Dehnungspfad
R	Parameter der intergranularen Dehnung zur Definition des elastischen Bereichs

Abkürzungen

ALE	Arbitrary Lagrangian-Eulerian
CEL	Coupled Eulerian-Lagrangian
DEM	Diskrete-Element-Methode
DP	Drucker-Prager
FEM	Finite Element Methode
GMNIA	Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnung mit Imperfektion
GNA	geometrisch nichtlineare Berechnung
GNIA	Geometrisch nichtlineare Berechnung mit Imperfektion
LBA	lineare elastische Verzweigungsberechnung
MNA	materiell nichtlineare Berechnung
SPH	Smooth Particle Hydrodynamics

Glossar

Die Begriffsdefinition erfolgt nach DIN EN 1991-4 und DIN EN 1991-1-6. Die Begriffe werden wie folgt abgegrenzt. Es dient dem einheitlichen Verständnis in der Fachwelt.

Begriff	Definition
aktiver Spannungszustand	Die größere Hauptspannung wirkt in der Achse des Schaf-tes in vertikaler Richtung. Im Füllzustand herrscht dieser Zustand
dünnwandiger kreisförmiger Silo	kreisförmiger Silo mit einem Verhältnis von Durchmesser zur Wanddicke von größer als $d_c/t = 200$
exzentrisches Entleeren	Fließprofil im Schüttgut mit einer in Bezug auf die vertikale Mittelachse unsymmetrischen Verteilung des sich bewege-nen Schüttgutes. Dies ist üblicherweise die Folge einer exzen-trisch angeordneten Auslauföffnung. Es kann auch durch andere zur Unsymmetrie führenden Phänomene hervorge-rufen sein
Fließprofil	geometrische Form des ausfließenden Schüttgutes, wenn sich diese bereits voll ausgebildet hat
frei fließendes Material	granulares Schüttgut, dessen Fließverhalten nicht merklich von Kohäsion beeinflusst ist
gemischtes Fließen	Kernflussprofil, bei dem der Fließkanal noch unterhalb der Schüttgutoberfläche mit der vertikalen Silowand in Berüh-rung kommt
granulare Medien	Material, das sich aus einzelnen voneinander getrennten Körnern aus festen Partikeln zusammensetzt, mit Partikeln in etwa gleicher Größenordnung, bei dem bei der Ermitt-lung der Lasten die zwischen den Einzelkörnern befindliche Luft nur eine geringe Rolle spielt und auf das Schüttgutflie-ßen nur geringen Einfluss hat

Horizontallastverhältnis K	Wert, der angibt, in welchem Verhältnis die auf die vertikale Silowand wirkende mittlere Horizontallast p_h und die mittlere Vertikallast p_v an dieser Stelle im Schüttgut zueinander stehen
Hourglassing	Bei einem regelmäßigen Verformungsmuster von Elementen mit einer reduzierten Integration erfährt der Integrationspunkt keine Verzerrung, damit auch keine Energie, weshalb es Null-Energie-Mode bezeichnet wird
innerer Schlotfluss	Fließprofil mit Schlotfluss, in dem die Fließkanalgrenze sich bis zur Schüttgutoberfläche erstreckt, ohne dass es dabei zu Berührungen des Fließbereiches mit der Silowand kommt
Kernfluss	Fließprofil, bei dem sich im Schüttgut ein Fließkanal über der Auslauföffnung entwickelt, während das Schüttgut im Bereich zwischen diesem Fließkanal und der Silowand in Ruhe verbleibt. Kommt der Fließkanal hierbei in Kontakt mit der vertikalen Silowand, spricht man von „gemischtem Fließen“ -oder er kann sich ohne jegliche Kontaktbereiche mit der Wand bis zur Oberfläche hin erstrecken. Dieser Fall wird mit „Schlotfluss“ bezeichnet
Massenfluss	Das gesamte Schüttgut kommt in Bewegung. Um das zu erreichen, müssen die Trichterwände ausreichend steil oder glatt ausgelegt sein
passiver Spannungszustand	Die größere Hauptspannung wirkt in der Achse des Schaftes in horizontaler Richtung. Im Entleerungszustand, besonders im Trichter herrscht dieser Zustand
Schlankheit	Verhältnis von Höhe zu Durchmesser h_c/d_c
Schüttgut	Bezeichnung für einen Festkörper, der aus einer Vielzahl voneinander unabhängiger Einzelpartikel besteht
Silo	Behälterkonstruktion zur Aufnahme von Schüttgütern, bestehen meist aus einem vertikalen Schaft mit einem Trichter
Schlotfluss	Fließprofil, in dem das Schüttgut in einem vertikalen oder nahezu vertikalen Fließkanal oberhalb der Auslauföffnung in Bewegung ist, sich aber neben dem Fließkanal in Ruhe befindet

Switch	Der Übergang vom aktiven zum passiven Spannungsfeld. An der Stelle entsteht eine lokale Spannungsspitze im Verlauf des Horizontaldrucks. Im Massenflusssilo tritt die Stelle immer am Schaft-Trichter-Übergang
Tote Zonen	Bereiche, in denen sich das Schüttgut in Ruhe und wird erst bei der völligen Entleerung des Silos ausgetragen. Wegen der toten Zonen ergeben sich Probleme wie breite Verweilzeitverteilung, Brückenbildung und Schachtbildung
Trichter	Siloboden mit geneigten Wänden

Stabilität von Schalen

Begriff

Definition

Beulen	Das Tragwerk verliert unter Membrandruck- und/oder Membranschubbeanspruchung plötzlich seine Stabilität. Beulen führt entweder zu großen Verformungen oder dazu, dass das Tragwerk nicht mehr in der Lage ist, die einwirkenden Lasten zu tragen
Membranschnittgrößen	Membranschnittgrößen sind die Kräfte je Längeneinheit der Schale, welche sich aus dem Integral des Verlaufs der Normalspannungen und der Schubspannungen parallel zur Schalenmittelfläche über die Schalendicke ergeben
Membranspannungen	Membranspannungen sind wie folgt definiert: Membranschnittgrößen geteilt durch die Schalendicke
Innendruck	Anteil der Flächenbelastung, der normal zur Schalenoberfläche nach außen gerichtet, wirkt. Seine Größe kann sowohl in Umfangs- als auch in Meridianrichtung veränderlich sein
idealer Beulwiderstand	kleinste Verzweigungs- oder Durchschlagslast, berechnet unter den idealisierenden Annahmen elastischen Werkstoffverhaltens, perfekter Geometrie, perfekter Lasteinleitung, perfekter Auflagerung, isotropen Werkstoffs und Abwesenheit von Eigenspannungen
ideale Beulspannung	zum idealen Beulwiderstand gehörende Membranspannung

Glossar

plastischer Referenzwiderstand	plastische Grenzlaster, berechnet unter den idealisierenden Annahmen starr-plastischen Werkstoffverhaltens, perfekter Geometrie, perfekter Lasteinleitung, perfekter Auflagerung, isotropen Werkstoffs
charakteristischer Beulwiderstand	Beullast unter Berücksichtigung des inelastischen Werkstoffverhaltens, der in praktischen Stahlbauten unvermeidbaren geometrischen und strukturellen Imperfektionen und gegebenenfalls vorhandener Folgelasteffekte
Schale	Tragwerk oder Tragwerkselement, das aus einer gekrümmten dünnen Wandung besteht
Wandreibungslast	meridionaler Anteil der Flächenbelastung entlang der Schalenwandung infolge Reibung, verbunden mit Innendruck

1 Einführung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Das Wort Silo bedeutet ursprünglich Getreidegrube. Heute dienen Silos nicht nur zur Lagerung von Getreide, sondern auch zur Speicherung unterschiedlicher Schüttgüter aus den Bereichen Kunststoff-Herstellung und Verarbeitung, Chemie, Gummiaufbereitung, Nahrungsmittel-Industrie und einigen Bereichen der Mineralstoff-Industrie. Im Gegensatz zu einem Flüssigkeitsbehälter, bei dem der hydraulische Druck proportional zur Höhe zunimmt, kann ein Schüttgut Schubspannungen übertragen. Der Horizontaldruck steigt mit zunehmender Tiefe immer weniger an und strebt einem Endwert an. Demzufolge werden Silos vorzugsweise schlank gebaut. Die Errichtung von Silos setzt eine interdisziplinäre Zusammenarbeit zwischen Bauingenieur und Verfahrenstechniker voraus. Silos mit ausmittiger Auslauföffnung werden häufig aus verfahrenstechnischen Gründen exzentrisch entleert und unterliegen dabei hohen Beanspruchungen aus den bisher nicht korrekt erfassten unsymmetrischen Belastungen. Deshalb weisen Silobauwerke eine hohe Schadensrate auf und stellen für die planenden Ingenieure immer noch eine Herausforderung dar. Ein Siloschaden aufgrund der exzentrischen Entleerung ist dem aktuellen Artikel (P. J. WANG u. a. 2016) zu entnehmen. KALDENHOFF u. a. 2004 berichtet von einem Zementsilo, bei dem sich eine Strombe während des Entleerens an der Wand ausbildet. Es zeigten sich große Bereiche mit erheblicher Rissbildung im Siloschaft.

Die Entwicklung des Silobaus begann mit der Arbeit von JANSSEN 1895. Trotz intensiver Forschung Anfang der 1960er-Jahre in Braunschweig und des Sonderforschungsbereiches (SFB219 1997) in Karlsruhe bleiben noch viele Fragen ungeklärt. Die Problemvielfalt resultiert meistens aus den komplexen Phänomenen während des Entleerens. Nicht zuletzt ist zu erwähnen, dass experimentelle Versuche aus früherer Zeit eine große Streubreite zeigten, da die Modellsilos meist nicht sauber vorgefertigt waren, sodass daraus keine qualitativen Erkenntnisse gewonnen werden konnten. Versuchsergebnisse mit identischen Versuchsbedingungen bezüglich des verwendeten Schüttgutes und der Silogeometrie können nennenswert voneinander abweichen.

Schwierigkeiten bei der Modellierung bereiten das nichtlineare Stoffverhalten, die Interaktion zwischen Schüttgut und Silowand, die Randbedingungen der Fließvorgänge und die großen

1 Einführung

Elementverzerrungen beim Entleeren. In den letzten Jahren wurden numerische Methoden, wie die Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methode (ALE), die Coupled Eulerian-Lagrangian Methode (CEL) und die Smooth Particle Hydrodynamics (SPH), entwickelt, die besonders das Problem der großen Verzerrung überwinden. Zu erwähnen ist noch die Diskrete-Elemente-Methode (DEM), die in verfahrenstechnischen Bereichen immer mehr an Bedeutung gewinnt.

Eine genaue Erfassung der Einwirkungen aus dem Schüttgut ist für eine wirtschaftliche und sichere Auslegung von Silokonstruktionen von vitalem Interesse. Der Zusammenhang zwischen Fließprofil und Wanddruck ist generell abhängig von Mechanismen, wie dem inneren Wandreibungswinkel ϕ_i und dem Wandkoeffizienten μ . Eine Vorhersage, wie der Fließkanal oder die tote Zone aussehen, ob sie sehr schnell zur Wand geht, ist auf Basis von Messergebnissen nicht möglich. Das lückenhafte Wissen über den Silodruck unter exzentrischer Entleerung führte zu vereinfachten Annahmen und empirischen Formeln, die entweder sehr unwirtschaftlich oder zum Teil falsch waren. Silos mit exzentrischer Auslauföffnung lassen sich nur mit Hilfe räumlicher Modelle beschreiben. Wegen der Komplexität der Fließvorgänge setzt eine erfolgreiche Modellierung ein passendes Stoffmodell mit der richtigen Modellierungstechnik voraus.

Das vorrangige Ziel dieser Arbeit ist die Modellierung der Fließvorgänge in Silos. Diese Arbeit soll dazu beitragen, mit Hilfe der numerischen Methoden ein besseres Verständnis des Fließverhaltens zu schaffen und die Größe und den Verlauf der Druckverteilung auf die Silowand bei verschiedenen Geometrien und verschiedenen Schüttgütern festzulegen. Am Ende wird ein Vorschlag eines neuen Lastansatzes für den Horizontaldruck bei exzentrischer Entleerung gemacht. Dieser Ansatz sollte sowohl die Einwirkung möglichst realitätsnah erfassen als auch für die Praxis handhabbar sein.

1.2 Gliederung der Arbeit

Zunächst wird der aktuelle Stand der Forschung bezogen auf die exzentrische Entleerung kurz erläutert und diskutiert. Daran schließt eine kurze Einführung in den Beulsicherheitsnachweis, anhand von Stabilitätsuntersuchungen wird die Problematik verdeutlicht. Eine Gegenüberstellung der Einwirkungen aus der numerischen Simulation und dem Lastansatz der Norm zeigt erhebliche Unterschiede. Es bedarf somit einer Verbesserung oder eines neuen Entwurfs zur Beschreibung der Silolasten bei exzentrischer Entleerung.

Weiterhin werden verschiedene Simulationsmethoden zur Simulation der Fließvorgänge in Silos vorgestellt und erörtert. Es folgen die numerischen Grundlagen zu den gewählten Methoden. Im nächsten Schritt folgt die Beschreibung der zwei verwendeten Materialmodelle. Anschlie-

ßend werden die gewählten Simulationsmethoden miteinander verglichen und die Ergebnisse an einer analytischen Lösung validiert. Als nächstes folgen Untersuchungen mit verschiedenen Auslaufgeschwindigkeiten und variierender Größe der Auslauföffnung. Anschließend wird eine Entleerungsberechnung mit beiden verwendeten Stoffmodellen durchgeführt. Des Weiteren wird die Nachgiebigkeit bei zentrisch und exzentrisch angeordneter Auslauföffnung untersucht.

Die numerischen Studien umfassen die Schüttgüter Weizen und Sand. Das Fließverhalten und die ermittelten Silolasten der beiden Schüttgüter werden grundlegend untersucht und miteinander verglichen. Anhand der numerischen Ergebnisse wird zurückblickend auf das aktuelle Ingenieurmodell eingegangen und dessen Schwachstellen diskutiert. Anschließend werden die Druckverteilungen mit Hilfe mathematischer Ansätze approximiert.

Im Anschluss daran wird eine Parameterstudie mit variierenden primären Einflussgrößen für Weizen durchgeführt, woraus ein praxisgerechtes Ingenieurmodell abgeleitet wird. Es wird als nächstes die Auswirkung des neuen Ansatzes auf die Bemessung untersucht. Abschließend folgen die Zusammenfassung der im Rahmen der Arbeit erzielten Erkenntnisse und Ergebnisse und ein Ausblick auf zukünftige Aufgaben.

2 Exzentrische Entleerung von Silos

2.1 Allgemeines

Bei rotationssymmetrischen Konstruktionen ist eine Biegebeanspruchung zu vermeiden. Fließt das Schüttgut nicht mittig aus, bilden sich tote Zonen, in denen sich das Schüttgut im Ruhezustand befindet. Neben den allgemeinen Nachteilen toter Zonen, wie der Schachtbildung und der längeren Verweildauer, besteht das Kernproblem für die Auslegung des Silos darin, dass sich während des Entleerens eine ungleichförmige Beanspruchung einstellt. In der Praxis trifft man zudem oft auf Silos, deren Auslauföffnung aus verfahrenstechnischen Gründen exzentrisch angeordnet ist. Besitzt ein Silo mehrere Auslauföffnungen, kann es auch zur exzentrischen Entleerung führen, wenn nicht alle gleichzeitig geöffnet werden. Eine exzentrische Fließsituation kann sich durch die ungleichmäßige Verteilung der Dichte und Konsolidierungsgrade des Schüttgutes beim Befüllen ergeben. Es ist deshalb nicht auszuschließen, dass sich besonders bei schlanken Silos trotz zentrischen Befüllens und zentrisch angeordneter Auslauföffnung ein parabelförmiger Fließkanal ausbildet.

Exzentrisches Entleeren wird meistens durch eine unsymmetrische Entnahme des Schüttgutes hervorgerufen. Viele Silos werden symmetrisch errichtet, erzeugen beim Entleeren jedoch einen Fließkanal am Rand. Im Folgenden soll exemplarisch anhand von zwei verschiedenen Schadensfällen erläutert werden, wie sich auch bei einer zentrisch angeordneten Auslauföffnung ein exzentrischer Fließkanal infolge des Entleerungsvorgangs ausbilden kann.

Abbildung 2.1 zeigt das Stahlsilo einer Biogasanlage für die Lagerung von Holzhackschnitzel. Am Siloboden dient eine umlaufende Förderschnecke dazu, das Schüttgut vom Wandbereich zur Auslauföffnung in der Mitte der Bodenplatte zu fördern. Um eine gleichmäßige Entleerung sicherzustellen, läuft diese innerhalb von 24 Stunden einmal über den gesamten Siloumfang. In der statischen Berechnung wurde eine zentrische Entleerung angenommen. Nicht berücksichtigt wurde allerdings, dass die zentrische Entleerung nur im zeitlichen Mittel gilt und sich dennoch für jeden Zeitpunkt ein Fließkanal oberhalb der Förderschnecke ausbilden kann. Die Folge war eine umlaufende Beule unmittelbar in dem Übergangsbereich zwischen Fließkanal und toter Zone, die dazu führte, dass im Bereich des Treppenturms die Schrauben abgerissen

2 Exzentrische Entleerung von Silos

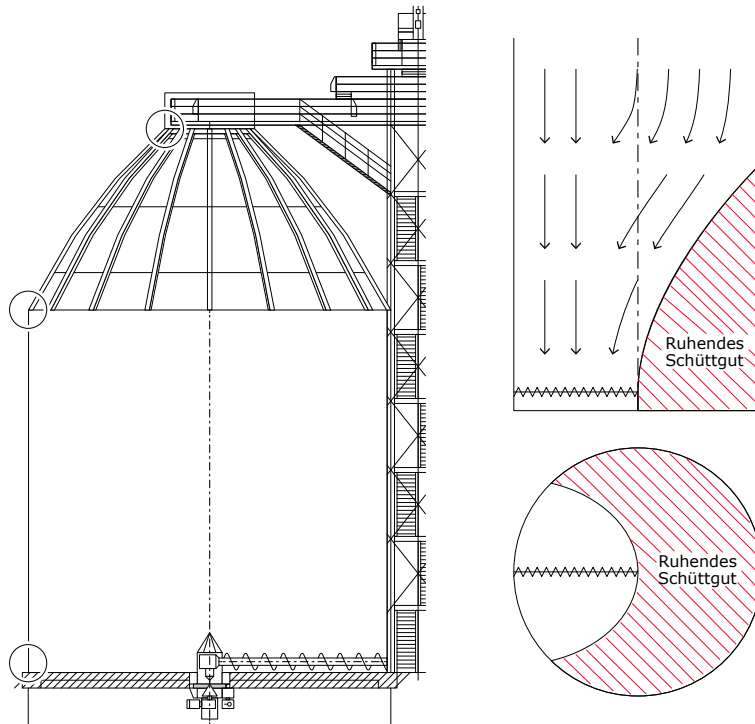


Abb. 2.1: Biogasanlage in Steinhude (KALDENHOFF 2014)

sind. Eine ähnliche Problematik führte auch bei dem in Abbildung 2.2 dargestellten Zementsilo in Betonbauweise dazu, dass dieses aufwendig saniert werden musste. Die Entleerung sollte ebenfalls über eine Auslauföffnung im Zentrum der Bodenplatte erfolgen. Dabei wurde auf das altbewährte Prinzip des sogenannten „inverted cone“ zurückgegriffen, bei dem das Schüttgut über Drucklufteinträge fluidisiert wird. Der Innenkegel wurde in sechs Teilbereiche unterteilt, um die Belüftung segmentweise durchführen zu können. Bei der Entleerung führt dies anstelle eines Massenflusses jedoch zur Ausbildung eines Fließkanals im Bereich des jeweils belüfteten Segments. Daraus ergibt sich eine umlaufende Trombe mit wechselnder Biegebeanspruchung für die Betonschale.

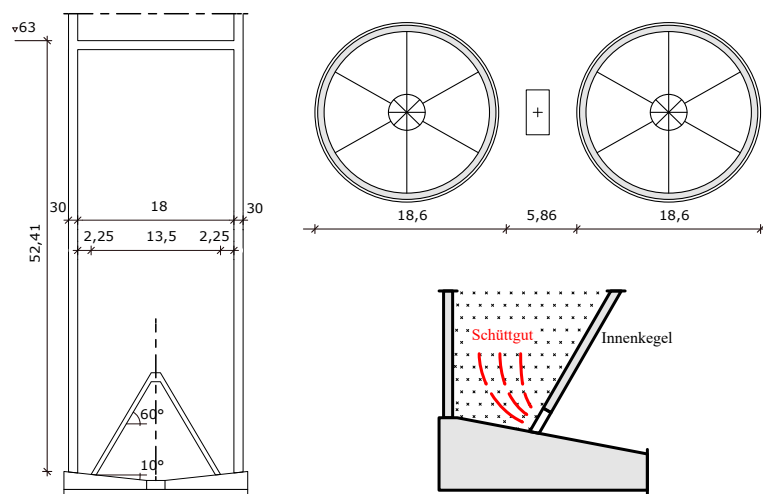


Abb. 2.2: Typisches Zementsilo mit Belüftungseinrichtung (KALDENHOFF 2014)

In den Auswertungen von Siloversuchen zeigen sich ungleichmäßig verteilte Wanddrücke auf gleicher Höhe über den gesamten Umfang. Selbst bei zentrischer Entleerung sind Schwankungen zu erkennen. Da das Schüttgut in der Regel ungleichförmig (Entmischung, Perkolation) gelagert ist, reagieren die Entleerungsdrücke und das Fließprofil empfindlich gegenüber Wandunregelmäßigkeiten und ungleichförmig verteilter Schüttgutdichte. Aufgrund von Unwissenheit über die Zusammenhänge zwischen der Lage der Auslauföffnung und des sich daraus einstellenden Fließprofils kommt es oft zu Siloschäden.

2.2 Entwicklung der Lastansätze für die Praxis

2.2.1 Gleichmäßige Lasten

Anders als bei einem Flüssigkeitsbehälter wird das Eigengewicht des Schüttgutes durch die Reibungslast zwischen dem Schüttgut und der Wand abgetragen. Der Druck infolge des Schüttgutes wächst mit zunehmender Tiefe nur bis zu einem bestimmten Grenzwert an. Dieses Phänomen wurde schon in 1895 von JANSSEN 1895 experimentell beobachtet. Aus den Versuchsergebnissen entwickelte er eine Theorie zur Beschreibung der Schüttgutlasten in Silozellen, indem er das Gleichgewicht an einem infinitesimalen Scheibenelement bildete. Die Theorie liegt vielen vereinfachten Annahmen zugrunde. Die Vertikallasten auf eine gedachte horizontale Scheibe sowie das Verhältnis des Horizontaldrucks zum mittleren Vertikaldruck werden als konstant angenommen. In den meisten Normen basiert die Ermittlung der Lasten für Silos immer noch auf diesem Ansatz. Allerdings beschränkt sich der Gültigkeitsbereich auf die dynamischen Entleerungsvorgänge.

In Abbildung 2.3 wird ein scheibenförmiges Volumenelement (Scheibenelement) aus dem Silo betrachtet. An dem dargestellten infinitesimalen Scheibenelement wird das Gleichgewicht gebildet. Unter vereinfachten Annahmen wird das Gleichgewicht wie folgt formuliert:

$$A P_v + \gamma A dz - A (P_v + dp_v) - U P_w dz = 0 \quad (2.1)$$

Mit Hilfe des Horizontallastverhältnisses K

$$K = \frac{P_h}{P_v} \quad (2.2)$$

und des Wandreibungskoeffizienten

$$\mu = \frac{P_w}{P_h} \quad (2.3)$$

2 Exzentrische Entleerung von Silos

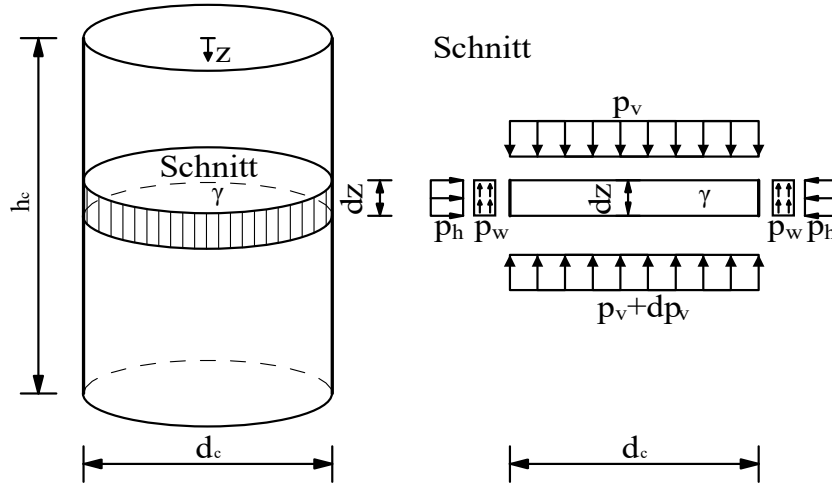


Abb. 2.3: Fülllasten nach Janssen

wird Gleichung (2.1) in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die Vertikalspannung P_v überführt:

$$\gamma - \frac{dp_v}{dz} - \frac{U K \mu P_v}{A} = 0 \quad (2.4)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt die Vertikallast bei $z = 0$ und $P_v = 0$:

$$P_v = \frac{\gamma A}{K \mu U} \left(1 - e^{-z \frac{K \mu U}{A}} \right) \quad (2.5)$$

und die Horizontallast P_h :

$$P_h = \frac{\gamma A}{\mu U} \left(1 - e^{-z \frac{K \mu U}{A}} \right) \quad (2.6)$$

Es ist bekannt, dass der Entleerungsdruck mit dem Füllzustand zunimmt. Versuche an realen Silos ergaben, dass sich der Verlauf und die Höhenlage des Druckmaximums stark ändern. Das Fließverhalten und die daraus resultierenden Entleerungslasten hängen wesentlich von den Schüttguteigenschaften und der Bauwerksgeometrie ab. Es ist noch nicht gelungen, dieses Phänomen in einen Rechenansatz zu fassen. Um die auftretenden Druckmaxima einzuhüllen, werden die Entleerungslasten durch eine Erhöhung der aus der Janssen-Theorie ermittelten Fülllasten beschrieben. Dieser Erhöhungsfaktor ist in der (DIN EN 1991-4 2010) bei schlanken Silos der Anforderungsklassen 2 und 3 nicht schüttgutspezifisch und beträgt für die Horizontallasten $C_h = 1,15$ und für die Wandreibungslasten $C_w = 1,10$. Bei niedrigen Silos und Silos mit mittlerer Schlankheit wird der Erhöhungsfaktor aufgrund der nachlassenden Effekte durch einen Schlankheitsbeiwert abgemindert. Bei Silos der Anforderungsklasse 1 (Lagerkapazitäten < 100 Tonnen) betrifft es oft kleine Stahlsilos, bei denen der Erhöhungsfaktor zusätzlich durch schüttgutspezifische Parameter vergrößert wird. Es sei erwähnt, dass die Einteilung bezüglich

des Fassungsvermögens in verschiedene Anforderungsklassen keinem mechanischen Verhalten zugrundeliegt und in der Praxis kontrovers bleibt.

Einen ausführlichen Überblick über die verschiedenen Ansätze sowie eine geschichtliche Entwicklung der Norm ist in (HAMPE 1991a; RUCKENBROD u. a. 2006) zu finden.

2.2.2 Teilflächenlast

Aufgrund ungleichmäßig verteilter Schüttguteigenschaften, Imperfektion der Wand und Exzentrizitäten beim Befüllen und Entleeren entstehen neben den symmetrischen Lasten über den Siloumfang in der Regel noch unsymmetrische Lasten, die zu einer Biegebeanspruchung führen. Um deren Auswirkungen phänomenologisch zu berücksichtigen, wurde in der DIN 1055-6:1987 weltweit zum ersten Mal das Konzept der Teilflächenlast aufgenommen. Die Teilflächenlasten sind nicht die tatsächlich vorhandenen unsymmetrischen Entleerungslasten, die Auswirkung entsprechen aber denen aus einer realen Beanspruchung. Ist der Siloschaft bei Silos der Anforderungsklasse 2 am oberen und unteren Rand ausreichend gegen horizontale Verformung ausgesteift, darf die Teilflächenlast durch eine gleichförmige Erhöhung der Lasten ersetzt werden. Für nicht ausreichend ausgesteifte Silos der Anforderungsklasse 2 und Silos der Anforderungsklasse 3 sind Teilflächenlasten anzusetzen. Bei Silos der Anforderungsklasse 1 müssen die Anteile der Teilflächenlast nicht berücksichtigt werden.

In der DIN 1055-6:1987 war die Teilflächenlast in halber Höhe auf einer quadratischen Fläche mit der Seitenlänge $s = 0,8 A/U = 0,2 d_c$ anzusetzen. Um Gleichgewicht im Lastbild zu erhalten, wurde diese Teilflächenlast diametral entgegengesetzt angenommen. Der Ungleichförmigkeitsfaktor β wird durch die Schlankheit, die Exzentrizität, die Steifigkeit und das Schüttgut bestimmt. Wegen der kleinen Seitenlänge $s/U = 0,8 A/U^2 = 0,064$ wirkt die Teilflächenlast als Einzellast. Aufgrund der aus dieser Einzellast resultierenden Berechnungsschwierigkeiten (RUCKENBROD u. a. 2009) folgen die Teilflächenlasten bei dünnwandigen Silos anderen Überlegungen. Im Bereich der Teilflächenlast sind keine Wandreibungskräfte zu berücksichtigen, d. h. es werden keine zusätzlichen axialen Membrandruckspannungen erzeugt. Mit der Erkenntnis, dass Siloschäden dünnwandiger Silos in der Regel durch Beulen verursacht sind, hat Rotter für EN DIN 1991-4 das Konzept der Teilflächenlast modifiziert. Die aktuellen Teilflächenlasten unterscheiden sich für dünnwandige und dickwandige kreisförmige Silos (Abbildung 2.4). Bei dünnwandigen Silos handelt es sich um eine gleichmäßig über den Umfang veränderliche Last $P_{pes} = p_{pe} \cos(\phi)$. Diese Teilflächenlast ist an jeder Stelle der vertikalen Wand anzusetzen. Bei geschweißten Silos der Anforderungsklasse 2 wird die Teilflächenlast in der Höhe z_p angesetzt. Dieser Laststreifen erzeugt auf einer Seite der Wand Ringdruckkräfte und auf der gegenüberliegenden Seite Ringzugkräfte. Im Vergleich zu den Teilflächenlasten für dickwandige

2 Exzentrische Entleerung von Silos

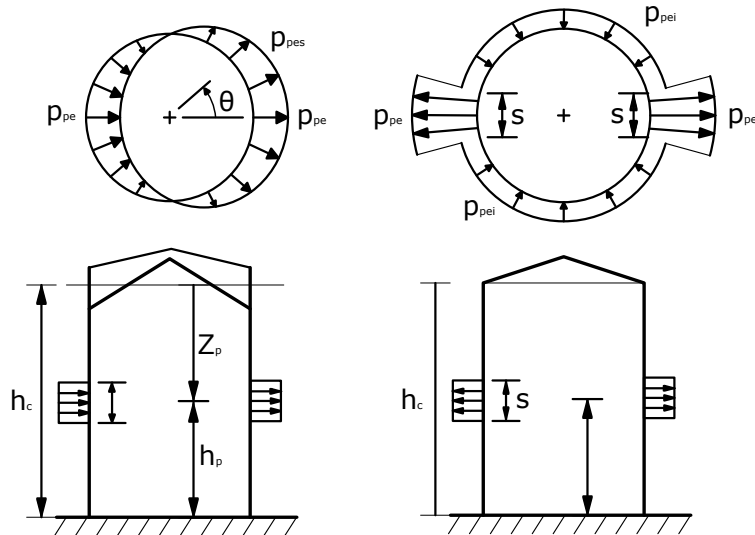


Abb. 2.4: Teilflächenlasten für dünnwandige und dickwandige Silozellen nach DIN EN 1991-4:2010

Silos ergibt sich eine resultierende Horizontallast $F_{pe} = \pi/2 s d_c p_{pe}$ durch die Integration über den Umfang. Das globale Biegemoment aus dem Ungleichgewicht führt zu zusätzlichen axialen Membranspannungen und ist für die Bemessung dünnwandiger Siloschäfte von entscheidender Bedeutung.

Die Teilflächenlast für dickwandige Silos aus Stahlbeton wurde durch einen zusätzlichen im Bereich außerhalb der Teilflächenlast nach innen gerichteten Ringdruck mit der Größe $P_{pei} = 1/7 P_{pe}$ modifiziert, um Ringzugnormalkräfte zu vermeiden. Der Beiwert $1/7$ lässt sich aus dem Kräftegleichgewicht ableiten.

Die aktuelle Norm sieht folgendes vor: Wenn die Exzentrizität bezogen auf den Durchmesser (e_0/d_c) größer als der kritische Wert 0,25 ist, kann die Auswirkung der Exzentrizität nicht mehr durch eine Teilflächenlast abgedeckt werden. Dadurch ist ein gesonderter Lastfall separat zu untersuchen.

2.2.3 Entleeren mit großen Exzentrizitäten: das Modell nach Rotter

Untersuchungen von Silos mit exzentrischer Auslauföffnung (FRESE 1979; STAMOU 1983) zeigten, dass die Position der Auslauföffnung sowohl die Größe des maximalen Horizontaldrucks, als auch dessen Lage beeinflusst. Anhand der durchgeführten Versuche konnten zwar Erkenntnisse über den Verlauf der Druckkräfte gewonnen werden (Abbildung 2.5), jedoch nicht zur Lage und Größe der maximalen Druckerhöhung, weil im Bereich möglicher Druckerhöhungen keine Messstellen angeordnet sein konnten. Bei den Versuchsergebnissen an realen Silos

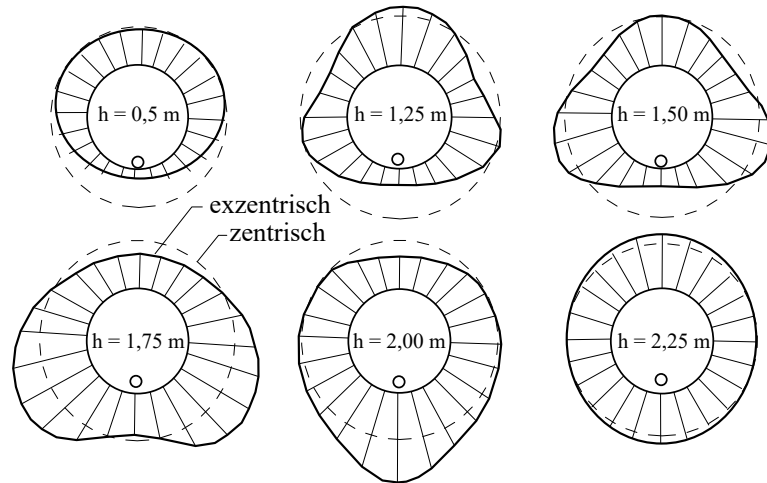


Abb. 2.5: Verteilung der Horizontaldrücke bei exzentrischer Entleerung (FRESE 1979)

sind aufgrund der großen Abhängigkeit der Entleerungsdrücke gegenüber ungleichförmig verteilter Schüttguteigenschaften große Diskrepanzen vorhanden. Aufgrund der bedingten Aussagekraft und wenig vorhandene Versuchsergebnisse konnte keine verallgemeinernde Aussage getroffen werden. Dies führte bei verschiedenen Autoren zu unterschiedlichen Ingenieurmodellen. Eine ausführliche Übersicht über die analytischen Modelle aus früheren Versuchen gibt ROMBACH 1991. Im Folgenden wird kurz das in DIN EN 1991-4 enthaltene Lastmodell erläutert. Das Modell basiert auf den Arbeiten von (ROTTER 1986; ROTTER 2001) und geht ursprünglich auf die Untersuchungen von (JENIKE 1967; PESCHL 1976; WOOD 1983) zurück.

Rotter entwickelte das Modell durch Anwendung der Scheibenelementmethode. Er unterteilte den Querschnitt in drei verschiedene Bereiche: Ruhebereich, Fließbereich und Übergangsbereich mit erhöhtem Druck. Um eine geschlossene Lösung zu ermöglichen, musste er vereinfachend annehmen, dass sich ausgehend von der Entleerungsöffnung ein Schlotfluss in Nähe der Wand bildet. Eine weitere Annahme ist die Ausbildung eines parallel zu den vertikalen Silowänden verlaufenden Fließkanals, dessen Radius sich über die Höhe nicht ändert. Die Abbildung 2.6 dient dazu, die geometrischen Zusammenhänge und die Verteilung zu veranschaulichen.

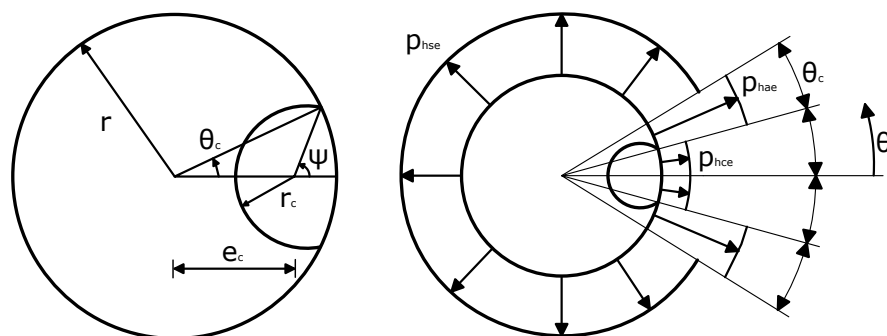


Abb. 2.6: Verteilung der Horizontaldrücke bei exzentrischer Entleerung nach DIN EN 1991-4

2 Exzentrische Entleerung von Silos

Die Winkel ψ und θ_c lassen sich über die geometrischen Zusammenhänge ermitteln:

$$\theta_c = \arccos\left(\frac{r^2 + e_c^2 - r_c^2}{2 r e_c}\right) \quad \text{und} \quad \psi = \frac{r}{r_c} \sin \theta_c \quad (2.7)$$

Die Bogenlängen U_{wc} und U_{sc} beschreiben die äußeren Abmessungen des Fließkanals. U_{wc} ist dabei die Bogenlänge entlang der Silowand, U_{sc} diejenige zwischen Fließkanal und ruhendem Schüttgut.

$$U_{wc} = 2 \theta_c r \quad \text{und} \quad U_{sc} = 2 r_c (\pi - \psi) \quad (2.8)$$

Die Querschnittsfläche des Fließkanals A_c ergibt sich wie folgt:

$$A_c = (\pi - \psi) r_c^2 + \theta_c r^2 - r r_c \sin(\psi - \theta_c) \quad (2.9)$$

Rotter setzt voraus, dass der Wandreibungswinkel ϕ_w vollmobilisiert ist und der Reibungswinkel ϕ_{sc} zwischen dem ruhenden Schüttgut und dem fließenden Schüttgut gleich $\tan(\phi_i)$ ist. Bildet man das vertikale Gleichgewicht im Fließkanal, ergibt sich analog zur Janssen-Gleichung die Vertikallast und die Horizontallast zu:

$$P_{hce} = P_{hco} \left(1 - e^{-z/z_{oc}}\right) \quad (2.10)$$

mit:

$$P_{hco} = \gamma K z_{oc} \quad \text{und} \quad z_{oc} = \frac{1}{K} \left(\frac{A_c}{U_{wc} \mu + U_{sc} \tan(\phi_i)} \right) \quad (2.11)$$

Im Bereich des ruhenden Schüttgutes ist die Horizontallast im Entleerungszustand nach DIN EN 1991-4:2010 die nach Janssen berechnete Fülllast. Am Übergang zwischen dem Fließkanal und dem ruhenden Schüttgut werden Spannungserhöhungen infolge der Lastumlagerung erwartet. Die Größe dieser um den Fließkanal erhöhten Lasten ergibt sich aus Gleichgewichtsüberlegungen:

$$P_{hae} = 2 P_{hf} - P_{hce} \quad (2.12)$$

Für die Wandreibungslasten sind die Horizontallasten mit dem Wandreibungskoeffizienten μ zu multiplizieren. Im Übergangsbereich ergeben sich große axiale Meridiandruckspannungen.

Um die Horizontallasten zu ermitteln, muss zuerst die Exzentrizität bekannt sein. Es sei darauf hingewiesen, dass die Exzentrizität e_c sich nicht auf die Mitte der Auslauföffnung, sondern auf den Mittelpunkt des Fließkanals bezieht (Abbildung 2.6). Sie ist eine reine Rechengröße, die sich empirisch aus Gleichung (2.13) ergibt. Da in den meisten Fällen keine genaueren Infor-

mationen über die Form und Größe des Fließkanals vorliegen, müssen in der Regel mehrere Fließkanalradien untersucht werden, um die kritische Fälle abzudecken.

$$e_c = r \left(\frac{\mu}{\tan(\phi_i)} \left(1 - \frac{r_c}{r} \right) + \left(1 - \frac{\mu}{\tan(\phi_i)} \right) \sqrt{1 - \frac{r_c}{r}} \right) \quad (2.13)$$

2.3 Diskussion der aktuellen Normvorschrift

Das Modell hat zwar den Eingang in die Norm gefunden, weist jedoch an einigen Stellen Schwächen auf und ist damit für die Praxis unzulänglich. Für die Horizontallasten im Bereich des ruhenden Schüttgutes gibt ROTTER 2001 für den Fall $q_s(0) = 0$ folgende analytische Lösung:

$$p_s(z) = p_{so} \left(1 + w + w u e^{-\frac{z}{z_{oc}}} - (1 + w + w u) e^{-\frac{z}{z_{os}}} \right) \quad (2.14)$$

mit:

$$P_{so} = \gamma K z_{os}; \quad z_{os} = \frac{A_s}{\mu K U_{ws}}; \quad w = \left(\frac{A_c}{A_s} \right) \left(\frac{U_{sc} \sin(\phi_i)}{\mu U_{wc} + U_{sc} \tan(\phi_i)} \right) \quad \text{und} \quad u = \frac{z_{oc}}{z_{oc} + z_{os}}$$

Tatsächlich handelt es sich hierbei nicht um eine exakte analytische Lösung. Analog zum Fließkanal lässt sich das vertikale Gleichgewicht einer Scheibe im Restquerschnitt formulieren:

$$A_s \frac{dq_s(z)}{dz} + q_s(z) K \mu U_{ws} = \gamma A_s + \tan(\phi_i) U_{sc} p_{co} \left(1 - e^{-\frac{z}{z_{oc}}} \right) \quad (2.15)$$

Aus der Randbedingung, dass die Spannung an der Schüttgutoberfläche gleich Null ist, folgt:

$$p_s(z) = w z_{os} K \left(1 - e^{-\frac{z}{z_{os}}} \right) + u K \left(e^{-\frac{z}{z_{os}}} - e^{-\frac{z}{z_{oc}}} \right) \quad (2.16)$$

mit:

$$z_{oc} = \frac{1}{K} \left(\frac{A_c}{U_{wc} \mu + U_{sc} \tan(\phi_i)} \right); \quad z_{os} = \frac{A_s}{\mu K U_{ws}}; \quad P_{co} = \gamma K z_{oc};$$

$$w = \gamma + \frac{U_{sc} P_{co} \tan(\phi_i)}{A_s} \quad \text{und} \quad u = \frac{U_{sc} P_{co} z_{oc} z_{os} \tan(\phi_i)}{A_s (z_{oc} - z_{os})}$$

Abbildung (2.7) stellt die Horizontallasten eines typischen Zementsilos ($H = 45 \text{ m}$, $D = 15 \text{ m}$) für das ruhende Schüttgut nach den unterschiedlichen Ansätzen dar. Bei einem kleinen Fließkanal weisen die Ansätze nach Rotter und der analytischen Lösung nur sehr geringe Unterschiede auf. Wird G jedoch größer, nehmen auch die Abweichungen zwischen dem Verlauf nach Rot-

2 Exzentrische Entleerung von Silos

ter und der analytischen Lösung zu. Aus den Versuchsergebnissen von (NIELSEN u. a. 1981; KAMINSKI 1982; RAMÍREZ u. a. 2010) wurde eine Drucksteigerung im Bereich des ruhenden Schüttgutes festgestellt. WÓJCIK u. a. 2017 untersuchte ein Flachbodensilo in originalem Maßstab ($d_c = 2,68\text{ m}$, $h = 7,52\text{ m}$) und bestätigte das 1,3 – 1,55fache der Horizontallasten und das 1,1 – 1,4fache der Wandreibungslasten für das Füllen in dem der Auslauföffnung gegenüberliegenden Bereich. Da die Horizontallasten im Bereich des ruhenden Schüttgutes die Fülllasten p_{hf} überschreiten, ist es unklar, ob der Ansatz (2.14) ausschließlich wegen dessen Komplexität nicht in die Norm eingeführt wurde. Die Auswirkung einer unterschätzten Last für das ruhende Schüttgut bleibt ungeklärt.

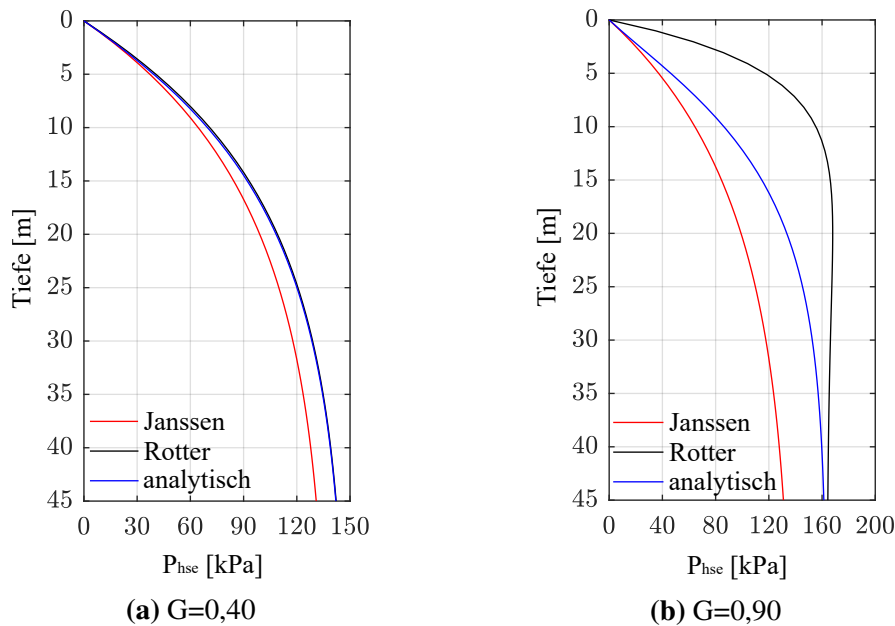


Abb. 2.7: Horizontallasten eines Zementsilos mit unterschiedlichen Ansätzen für das ruhende Schüttgut

Wie der Gleichung (2.13) zu entnehmen ist, hängt die Fließkanalexzentrizität vom Fließkanalverhältnis G und von dem Verhältnis $\eta = \mu / \tan(\phi_i)$ ab. Die Normen gingen zuerst sowohl für die Wandreibung als auch für den inneren Reibungswinkel von Mittelwerten aus.

Dies führte dazu, dass die η -Werte unterschiedlicher Schüttgüter für Wandtyp 3 (Beton-silo) nahe eins lagen und dadurch, unabhängig von der Fließkanalgröße, geringe Kontaktbereiche existieren. Streng genommen überschneiden sich der Fließkanal und der Siloschaft bei $\eta = 1$ nicht. Unter diesem Umstand wurde η mit den unteren charakteristischen Wandreibungskoeffizienten und mit den oberen charakteristischen Reibungswinkeln bestimmt. Für die in DIN 1991-5:2010 gelisteten Schüttgüter liegen die η Werte bei 0,21 bis 0,60 für den Wandtyp 1 und bei 0,41 bis 0,79 für den Wandtyp 2.

Des Weiteren ist die Unbestimmbarkeit des Fließkanals ein Problem. Das Modell nach *Rotter* bezieht sich ausschließlich auf einen Schlotfluss. In vielen Fällen weitet sich der Fließkanal-

radius nach oben aus (Abbildung 2.8) und berührt die der Auslauföffnung gegenüberliegende Silowand. Oberhalb der Fließkanalgrenze befindet sich ein Massenflusszustand. Im unteren Silobereich kommt es zu einem Fließkanal innerhalb des Schüttgutes. Neben dem Fließkanal sind tote Zonen vorhanden, die sich in Ruhe befinden. Um mögliche Fließkanalradien zu erfassen, ist der Ansatz von unterschiedlichen Fließkanalradien zwar gerechtfertigt, es muss jedoch hinterfragt werden, ob ein Fließkanal mit einem großen G -Verhältnis realistisch ist.

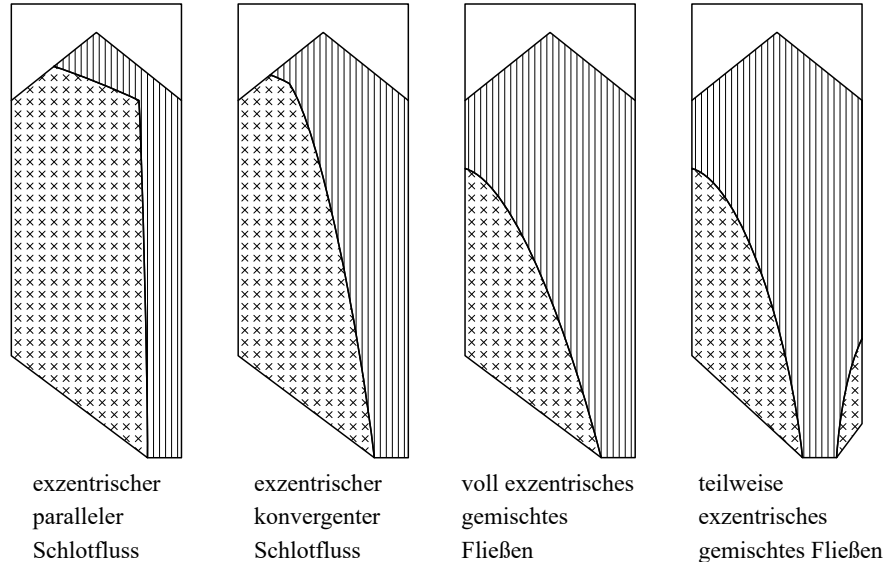


Abb. 2.8: Exzentrische Fließprofile nach DIN EN 1991-4

Es sollte auch nicht unerwähnt bleiben, dass es sich um eine inkonsistente Theorie handelt. Nach der Regel von de l'Hospital gilt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r_c \rightarrow r} \cos(\theta_c) &= \lim_{r_c \rightarrow r} \frac{r^2 + e_c^2 - r_c^2}{2 r e_c} \\
 &= \frac{\lim_{r_c \rightarrow r} (r^2 + e_c^2 - r_c^2)'}{\lim_{r_c \rightarrow r} (2 r e_c)'} \\
 &= \frac{-r(1 - \eta)^2 - 2 r}{-2 r \eta - r(1 - \eta)/\sqrt{1 - r_c/r}} \\
 &= \begin{cases} \frac{-2 r}{-2 r} = 1, & \text{wenn } \eta = 1 \\ \frac{-2 r}{\infty} = 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Bei $G \rightarrow 1$ müsste theoretisch das Modell nach *Rotter* die Janssen-Gleichung wiedergeben. Bei der Grenzbetrachtung $G \rightarrow 1$ stellt sich jedoch heraus, dass dies nur der Fall ist, wenn $\eta = 1$ ist. Je weiter η von 1 abweicht, desto weiter weicht die Grenzwertbetrachtung von der Janssen-Gleichung ab. Bei $G \rightarrow 1$ ist der Öffnungswinkel θ_c gleich 90° , d.h. der Fließkanal schneidet den Siloschaft in der Mitte durch. Das Verhältnis β zwischen der maximalen Silolast im Fließkanal

2 Exzentrische Entleerung von Silos

und im ruhenden Schüttgut in unendlicher Schüttguttiefe lässt sich über folgende Betrachtung ausdrücken:

$$\beta = \frac{p_{hce}(z = \infty)}{p_{hse}(z = \infty)} = \frac{A_c}{A} \frac{U \mu}{U_{wc} \mu + U_{sc} \tan(\phi_i)} = \frac{2}{1 + \tan(\phi_i)/\mu} \quad (2.18)$$

Die Norm sieht vor, dass mindestens drei Variationen gerechnet werden. Die festgelegten Verhältnisse G wurden zunächst auf 0,20;0,35 und 0,5 festgelegt. Eine Nachrechnung hat gezeigt, dass die daraus resultierenden Beanspruchungen aufgrund des nahe eins liegenden η -Wertes zu gering waren (KALDENHOFF u. a. 2004). Die zu untersuchenden Fließkanalradien wurden daher zu 0,50;0,75;0,90 geändert. Letztendlich werden in DIN EN 1991-4:2010 die Werte 0,25;0,4;0,6 vorgeschlagen.

Bei Betrachtung der Lastverteilungen (Abbildung 2.6) ist festzustellen, dass die Flächenlasten in horizontaler Richtung nicht im Gleichgewicht stehen. In der Berichtigung zur DIN 1055-6:2005 wurde P_{hae} durch einen Korrekturbeiwert so modifiziert, dass das Gleichgewicht in einem horizontalen Schnitt in unendlicher Tiefe herrscht. Ungleichgewichtskräfte können aufgrund der über die Höhe veränderlichen Verläufe nicht völlig ausgeschlossen werden. Außerdem werden für η die unteren Werte für den Wandreibungskoeffizienten und den inneren Reibungswinkel angesetzt. Somit wird Gleichung (2.11) zu:

$$z_{oc} = \frac{1}{K \mu} \left(\frac{A_c}{U_{wc} + U_{sc}/\eta} \right) \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{\mu}{\tan(\phi_i)} < 0.8 \quad (2.19)$$

Diese Änderung von $\phi_{i,u}$ auf $\phi_{i,l}$ führte dazu, dass sich für die meisten Schüttgüter bei der Berechnung von η ein Wert größer 1,0 ergibt. In den weiteren Berechnungsschritten wird der Arkuskosinus in Gleichung (2.7) größer als 1,0, was mathematisch nicht möglich ist. Die Begrenzung auf 0,8 (statt 1,0) ergibt sich daraus, dass der Öffnungswinkel für größere Werte so klein wird, dass kein vernünftiger Fließkanal mehr betrachtet werden kann. Mit der Einführung der DIN EN 1991-4 ist diese Modifizierung jedoch entfallen und soll deshalb im Zuge der aktuellen Überarbeitung wieder eingeführt werden. In der neuen Anpassung soll jedoch nur noch ein Fließkanal mit $G = 0,45$ betrachtet werden. In Tabelle 2.1 sind die wesentlichen Berech-

Tab. 2.1: Berechnungsergebnisse für ein Zementsilo

	DIN EN 1991-4			Anpassung
G	0,25	0,40	0,60	0,45
$\theta_c [^\circ]$	9,52	16,19	26,92	18,63
e_c/r	0,80	0,67	0,50	0,63
$A_c/A [\%]$	5,89	15,09	33,98	19,10
$p_{hce} [\text{kN/m}^2]$	31,92	51,21	77,01	57,66
$p_{hae} [\text{kN/m}^2]$	237,35	218,06	192,26	211,61
$p_{hse} [\text{kN/m}^2]$	134,63	134,63	134,63	134,63

nungsergebnisse für das Zementsilo mit einer Höhe von 45 m und einem Durchmesser von 15 m zusammengefasst. Für die Lasten sind die Werte in maximaler Silotiefe $z = 45$ m dargestellt.

Die nach dem Rotter'schen Ansatz berechneten Druckverteilungen stehen in großem Kontrast zu den gemessenen Druckverteilungen. Die nachfolgende Abbildung 2.9 verdeutlicht die räumliche Verteilung der Horizontallasten.

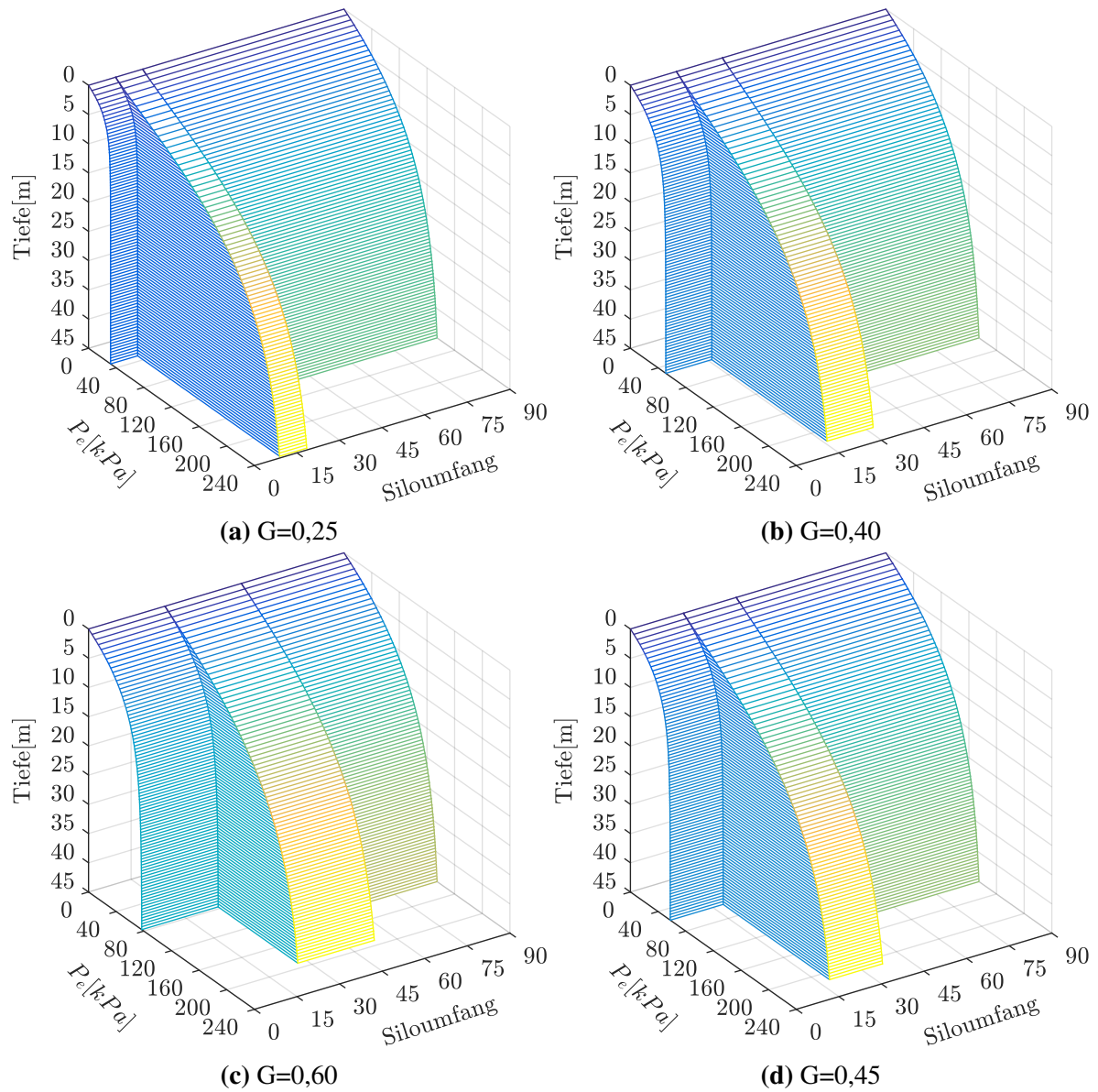


Abb. 2.9: Horizontallasten nach DIN EN 1991-4 und der geplanten Anpassung

An dieser Stelle soll betont werden, dass die Resultierende in die der Auslauföffnung gegenüberliegende Richtung zeigt. Je größer der Fließkanal, desto größer wird auch das Ungleichgewicht. Das zusätzliche Moment aus dem Ungleichgewicht erzeugt axiale Membrandruckspannungen auf der gegenüberliegenden Seite. Im Auslaufbereich, wo die axialen Druckspannungen

aus der erhöhten Wandreibungslast p_{wae} sehr groß sind, werden diese neutralisiert. Somit ist zu erwarten, dass Silos durch die Einführung des Korrekturbeiwertes ξ noch stabilitätsgefährdeter werden.

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

Im vorangegangenen Kapitel wurde der Lastansatz nach DIN EN 1991-4 erläutert. Da sich besonders bei Metallsilos bei strenger Anwendung der Regeln eine kaum noch zu beherrschende Bemessungssituation ergibt, wird in diesem Kapitel das Tragverhalten exemplarisch an einem Silo analysiert. Vergleichsrechnungen werden nach dem Normansatz und mit der simulierten Last durchgeführt und dienen dazu herauszufinden, inwieweit eine wirtschaftliche Bemessung noch möglich ist. Die für die numerische Modellierung verwendeten Parameter (Tabelle 2.2) sind aus (NEUMANN 2006) entnommen. Die numerische Untersuchung erfolgte mit dem Programm ABAQUS. Auf die Modellierung der Entleerungsvorgänge wird in weiteren Kapiteln ausführlich eingegangen.

Tab. 2.2: Schüttgutparameter für die numerische Modellierung (NEUMANN 2006)

Material	Weizen
Wichte γ	$8,39 \text{ kN/m}^3$
Elastizitätsmodul E	4848 kN/m^2
Poissonzahl ν	0,31
innerer Reibungswinkel ϕ_i	$25,2^\circ$
Wandreibungskoeffizient μ	0,24
Dilatanzwinkel Ψ	$8,0^\circ$

Abbildung 2.10 zeigt die geometrischen Abmessungen eines Rundsilos mit einem Durchmesser von 8 m und einer Höhe von 24 m. Die Exzentrizität e_o beträgt 2,4 m und ist somit größer als $0,25 d_c$. Nach der Klassifikation der Bemessungssituation kann das Silo der Anforderungsklasse 3 zugeordnet werden. Die Norm macht keine Angaben zur Form und Größe der Auslauföffnung. Hier ist eine runde Auslauföffnung mit einem Durchmesser von 2 m vorgesehen. Es sei an dieser Stelle vorweggenommen, dass die Beanspruchungen nach der Norm mit den gleichen Schüttgutkennwerten ermittelt wurden, um einen direkten Vergleich mit den simulierten Ergebnissen zu ermöglichen. In DIN EN 1991-4, Abs. 4.3.5(4) wird der Mittelwert K_m aus dem Mittelwert des inneren Reibungswinkels ϕ_{im} ermittelt:

$$K_m = 1,1(1 - \sin(\phi_{im})) \quad (2.20)$$

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

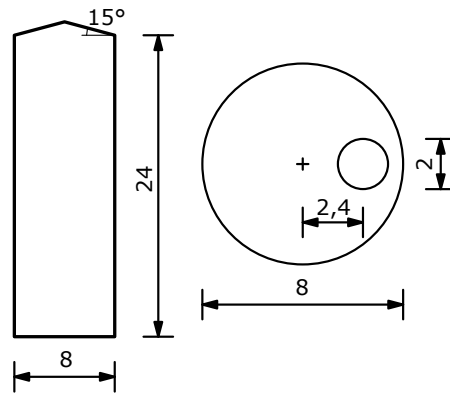


Abb. 2.10: Silogeometrie [m]

Abbildung 2.11 zeigt einen Vergleich zwischen der simulierten Fülllast und der nach DIN EN 1991-4. Die simulierte Last stimmt mit der Fülllast mit $K=0,57$ (ohne das Vorhaltemaß 1,1) in Gleichung (2.20) überein. Für die Vergleichsberechnung wird K normgerecht als $K=0,63$ angenommen. In Tabelle 2.3 sind die wesentlichen Berechnungsergebnisse zusammengefasst. Für die Lasten sind die Werte in maximaler Silotiefe dargestellt.

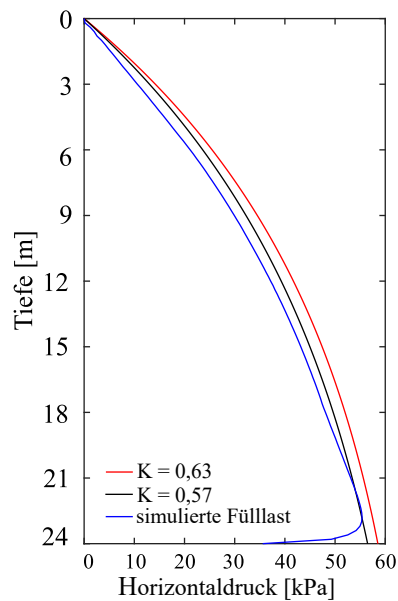


Abb. 2.11: Vergleich der Wanddrücke im Füllzustand nach der Janssen-Gleichung und der Simulation

Tab. 2.3: Berechnungsergebnisse des Lastfalls „große Exzentrizität“ für Weizen nach EN DIN 1991-4

G	0,25	0,4	0,6
θ_i (°)	10,14	17,17	28,40
e_c/R	0,81	0,69	0,52
A_c/A (%)	5,81	14,87	33,51
$p_{hce}(kN/m^2)$	9,56	15,46	23,50
$p_{hae}(kN/m^2)$	106,14	100,24	92,20
$p_{hse}(kN/m^2)$	57,85	57,85	57,85

2.4.1 Beulsicherheitsnachweise nach DIN EN 1993-1-6

Die Nachweise für die zylindrische Siloschale müssen nach (DIN EN 1993-1-6 2010) geführt werden. Nach diesem Regelwerk wird zwischen vier Grenzzuständen unterschieden, die jeweils getrennt voneinander untersucht werden müssen: plastische Grenze oder Zugbruch (LS1), zyklisches Plastizieren (LS2), Beulen (LS3) und Ermüdung (LS4). Eine der Hauptversagensformen dünnwandiger Silos ist das Versagen durch Beulen. Neben dem aus den Horizontallasten erzeugten Ringzug in Umfangsrichtung wird die Siloschale axial infolge Wandreibungslasten stark belastet. Es werden im Rahmen dieser Arbeit nur die Lasten aus dem Schüttgut berücksichtigt, infolge dessen das axiale Beulen (LS3) den kritischen Zustand darstellt.

Zur Berechnung der Schale stellt die DIN EN 1993-1-6 verschiedene Konzepte zur Verfügung, die in Tabelle 2.4 aufgeführt sind. Die Konzepte unterscheiden sich darin, ob mit einem linearen oder nichtlinearen Materialansatz, mit kleiner Verformung oder großer Verformung gerechnet wird und ob dabei die Imperfektionen berücksichtigt werden. Ausgehend von der membrantheoretischen Berechnung erhöht sich der Rechenaufwand in der Regel aufgrund der zunehmenden Komplexität mit steigendem Niveau. Dabei ist die GMNIA-Berechnung die anspruchsvollste Methode. Sie berücksichtigt sowohl die geometrischen und die materiellen Nichtlinearitäten, als auch den Effekt von unvermeidbaren geometrischen Imperfektionen. Die reale Beullast lässt sich damit am besten abbilden. Zusätzlich weist die DIN EN 1993-1-6 in Abschn.8.7.2.(3) darauf hin, begleitende Eigenwertanalyse durchzuführen, um Verzweigungspunkte im Lastpfad aufzuspüren. In ABAQUS geschieht die Kontrolle in jedem einzelnen Inkrementschritt. Das verformte System wird auf negative Eigenwerte überprüft, welche auf einen vorhandenen Gleichgewichtszustand unterhalb des aktuellen Lastniveaus hinweisen. So können möglicherweise maßgebende Versagensmechanismen aufgespürt werden.

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

Tab. 2.4: Berechnungskonzepte für Schalenstrukturen nach DIN EN 1993-1-6

Berechnungskonzept	Schalentheorie	Werkstoffgesetz	Schalentheorie
Membrantheorietische Berechnung	Membrangleichgewicht	entfällt	perfekt
Lineare elastische Berechnung (LA)	lineare Biegung und Verzer- rung	linear	perfekt
Lineare elastische Verzweigungsberechnung (LBA)	lineare Biegung und Verzer- rung	linear	perfekt
Geometrische nichtlineare elastische Berechnung (GNA)	nichtlinear	linear	perfekt
Materiell nichtlineare Berechnung (MNA)	linear	nichtlinear	perfekt
Geometrisch nichtlineare Berechnung mit Imperfektionen (GNIA)	nichtlinear	linear	imperfekt
Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnung mit Imperfektionen (GMNIA)	nichtlinear	nichtlinear	imperfekt

Die DIN EN 1993-1-6 bietet drei Nachweiskonzepte für die Tragsicherheit gegen Beulen:

- Spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis
- Numerisch gestützter Beulsicherheitsnachweis mittels globaler MNA-LBA Berechnung
- Numerisch gestützter Beulsicherheitsnachweis mittels globaler GMNIA-Berechnung

Spannungsbasierter Beulsicherheitsnachweis

Der traditionell spannungsbasierte Nachweis wird in der Praxis aufgrund der einfachen Handhabung favorisiert und ähnelt dem Stabilitätsnachweis des Knickstabs. Die theoretisch ideale Beulspannung für axial belastete Kreiszylinder wurde bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts von (LORENZ 1908; TIMOSHENKO 1910) hergeleitet. Die Lösung stellt heute noch die Grundlage zur Ermittlung der idealen Meridianbeulspannung dar:

$$\sigma_{cr} = \frac{Et}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (2.21)$$

Zur Erfassung des Einflusses der Zylinderschlankheit wird ein Faktor C_x eingeführt, der über den dimensionslosen Geometrieparameter l/\sqrt{rt} bestimmt wird. Um die Traglastreduzierung durch Imperfektionen zu erfassen, wird der Beulabminderungsfaktor χ über eine Funktion $\chi(\lambda)$ eingeführt. Die χ -Kurve wurde aus den weltweit veröffentlichten Versuchsergebnissen hergeleitet. Je nachdem wie groß der Einfluss der materiellen Nichtlinearität ist, unterscheiden sich die drei Bereiche „vollplastisch“, „teilplastisch“ und „rein elastisch“. Bei rein elastischem Beulen hängt der Beulabminderungsfaktor vom bezogenen Schlankheitsgrad $\bar{\lambda}$ und dem elastischen Imperfektionsabminderungsfaktor α ab. Der Abminderungsfaktor α berücksichtigt die Imperfektionen aus Unrundheit, unplanmäßiger Exzentrizität und Vorbeulen.

2 Exzentrische Entleerung von Silos

Besondere Bedeutung kommt beim spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweis dem elastischen Imperfektionsabminderungsfaktor α zu, der für Meridianbeulen wie folgt ermittelt wird:

$$\alpha = \frac{0,62}{1 + 1,91 (\Delta w_k / t)^{1,44}} \quad (2.22)$$

Dabei ist Δw_k die charakteristische Imperfektionsamplitude:

$$\Delta w_k = \frac{\sqrt{rt}}{Q} \quad (2.23)$$

Der Parameter Q dient zur Erfassung der Herstellqualität. In Abhängigkeit von der Herstellqualität werden die Schalen in drei Herstelltoleranzklassen „Exzellent (A)“, „Hoch (B)“ oder „Normal (C)“ eingeteilt. Wenn die fertigungstechnisch unvermeidbaren Toleranzen die vorgegebenen geometrischen Toleranzen einhalten, wird die Schale der entsprechenden Herstelltoleranzklasse zugeordnet. Je hochwertiger die gewählte Qualitätsklasse ist, desto geringer ist auch die anzusetzende Imperfektionsamplitude für die GMNIA-Berechnung bzw. der Imperfektionsabminderungsfaktor α . Mit diesem Konzept wird die Herstellqualität in die Nachweise mit einbezogen. Es ist zu beachten, dass die Herstellqualität nicht ausschließlich auf die Herstellung bezogen ist. Eine hohe Herstellqualität kann nach der Montage ggf. niedriger eingestuft werden.

Da Beulen durch Membrankräfte ausgelöst wird, kann der Einfluss der Schalenbiegung auf die Beultragfähigkeit vernachlässigt werden. Der Nachweis erfolgt auf der Einwirkungsseite auf Basis der Membranspannungen. Die beulrelevanten Spannungskomponenten für den Beulsicherheitsnachweis sind Druck in Meridianrichtung, Druck in Umfangsrichtung und Membranschubspannungen. Die Spannungen werden meistens aus einer linearen elastischen Berechnung ermittelt. Für einfache Fälle existieren analytische Lösungen.

MNA/LBA Konzept

Das grundsätzliche Vorgehen des MNA/LBA-Konzepts verläuft analog zu dem des spannungsbasierten Nachweises. Statt auf der Ebene der Spannungen erfolgt der Nachweis auf der Traglastebene. Es wird zunächst der ideale elastische Beulwiderstand r_{Rcr} mithilfe einer linear elastischen Berechnung (LBA) unter den entsprechenden Bemessungswerten der Einwirkungskombination ermittelt. Dabei entspricht r_{Rcr} dem niedrigsten Verzweigungslastfaktor. Der zweite zu ermittelnde Wert ist der plastische Referenzwiderstand r_{Rpl} . Dieser Referenzwert ist mithilfe einer materiell nichtlinearen Berechnung (MNA) zu bestimmen und entspricht der plastischen Grenzlasterlast unter der entsprechenden Einwirkungskombination. Falls keine MNA-Berechnung

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

durchgeführt werden kann, darf der plastische Referenzwiderstand r_{Rpl} auf der sicheren Seite liegend aus einer linearen Schalenberechnung (LA) wie folgt geschätzt werden:

$$r_{Rpl}^* = \frac{t f_{yk}}{\sqrt{n_x^2 - n_x n_\theta + n_\theta^2 + 3n_{x\theta}^2}} = \frac{f_{yk}}{\sigma_{m,eq,Eq}} \quad (2.24)$$

Der bezogene Schlankheitsgrad $\overline{\lambda}_{ov}$ der Gesamtschale kann wie folgt bestimmt werden:

$$\overline{\lambda}_{ov} = \sqrt{r_{Rpl}/r_{Rcr}} \quad (2.25)$$

Der Index „ov“ steht für overall und kennzeichnet die globale Betrachtung der Schalentragerwerke. Der Bemessungswert des Beulwiderstandes wird mit dem Beulabminderungsfaktor χ_{ov} ermittelt:

$$r_{Rd} = \chi_{ov} r_{Rpl} / \gamma_M \quad (2.26)$$

Das Kernproblem des MNA/LBA-Konzeptes besteht darin, die geeigneten globalen Beulparameter α_{ov} , β_{ov} , $\overline{\lambda}_{0v,0}$ und η_{ov} für χ_{ov} festzulegen. Die Norm sieht vor, die benötigten Parameter von Vergleichsbeulfällen zu verwenden, die eine ähnliche Imperfektionsempfindlichkeit, Beulform, geometrische Nichtlinearität und Fließeigenschaften aufweisen. Allerdings stehen für das MNA/LBA-Konzept in DIN EN 1993-1-6 nur die Beulparameter für Meridianbeulen, Umfangsbeulen und Schubbeulen zur Verfügung. Für Meridianbeulen können z.B. die Parameter wie beim spannungsbasierten Nachweis verwendet werden, wenn es sich um einen axialdruckbeanspruchten Zylinder handelt. Unter vorwiegender Umfangsdruckbeanspruchung können die Parameter für Umfangsbeulen verwendet werden. In Abbildung 2.12 sind die beiden Vorgehensweisen einander gegenübergestellt.

	SPN	MNA/LBA-Konzept
bezogener Schlankheitsgrad:	$\overline{\lambda} = \sqrt{f_{yk}/\sigma_{cr}}$	$\overline{\lambda}_{ov} = \sqrt{r_{Rpl}/r_{Rcr}}$
Abminderungsfaktor:	$\chi = f(\alpha, \beta, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}_0, \eta)$	$\chi_{ov} = f(\overline{\lambda}_{ov}, \overline{\lambda}_{0v,0}, \alpha_{ov}, \beta_{ov}, \eta_{ov})$
charakteristischer Widerstand:	$\sigma_{Rk} = \chi f_{yk}$	$r_{Rk} = \chi_{ov} r_{Rpl}$
Nachweis:	$\sigma_{Ed} < \sigma_{Rd}$	$F_{Ed} \leq F_{Rd} = r_{Rk} / \gamma_{Rk} F_{Ed}$

Abb. 2.12: Schemata des spannungsbasierten Nachweises und des numerischen gestützten Nachweises mittels MNA/LBA-Berechnung

Schwierig wird die Festlegung der Parameter für komplexere Schalen, bei denen der nachzuweisende Beulfall nicht einem der Basisbeulfälle zugeordnet werden kann. In der Norm wird die Durchführung von geeigneten Versuchen empfohlen, was sich jedoch für die Praxis als schwierig darstellt. Als konservative Lösung können in jedem Fall die Werte für axialdruckbeanspruchte unversteifte Zylinder verwendet werden, da kein Schalenbeulfall imperfektionsempfindlicher als der Beulfall der axialen gedrückten Zylinderschale ist. Dies führt zu einer sehr konservativen

Bemessung, sodass der Beulsicherheitsnachweis häufig nicht erfüllt werden kann. Für Zylinder mit kombiniertem Membranspannungszustand rät Schmidt (s. Seite 164 SCHMIDT 2012) auf den spannungsbasierten Interaktionsnachweis zurückzugreifen.

Das MNA/LBA-Konzept gewinnt immer mehr an Bedeutung und sollte nach SCHMIDT 2012 gegenüber dem GMNIA-Konzept für die praktische Anwendung wegen wesentlich geringeren Aufwands favorisiert werden. In Zukunft sollten weitere Parameter, besonders der Imperfektionsabminderungsfaktor α_{ov} , für verschiedene Beulfälle entwickelt werden, um komplexe Beulprobleme einfach handhaben zu können.

Numerisch gestützter Beulsicherheitsnachweis mittels globaler GMNIA-Berechnung

Wie bereits beschrieben, ist die GMNIA-Berechnung im Vergleich zu den anderen Konzepten die fortgeschrittenste und anspruchsvollste Methode, um einen Beulsicherheitsnachweis zu führen. Da sie alle drei nichtlinearen Einflüsse auf das Beulverhalten einschließt und infolgedessen den theoretisch höchsten Realitätsgrad besitzt, werden große Sorgfalt und Erfahrung bei der Anwendung vorausgesetzt. Aufgrund der Komplexität und Fehleranfälligkeit sind in DIN EN 1993-1-6 Abs.8.7.2 (4-5) zwei Vorberechnungen vorgesehen, um einen tieferen Einblick in das Beulverhalten zu gewinnen und sich diesem langsam zu nähern.

Die erste Vorberechnung ist die Ermittlung des bezogenen Schlankheitsgrades $\overline{\lambda_{ov}}$ nach dem MNA/LBA-Konzept. Dadurch kann die Schale hinsichtlich des Grenzschlankheitsgrades in ein rein elastisches, elastisch-plastisches oder hochplastisches Beulproblem eingeordnet werden. Gleichzeitig liefert eine LBA-Berechnung die eigenformaffine Imperfektionsform. Anschließend wird eine GMNA-Berechnung durchgeführt, um den elastisch-plastischen Beulwiderstand der perfekten Schale zu ermitteln. Da die Imperfektion das Tragverhalten ungünstig beeinflussen sollte, muss sichergestellt werden, dass $r_{R,GMNA} > r_{R,GMNIA}$ gilt. Die GMNA-Berechnung liefert die kollapsaffine Imperfektionsform. Eine begleitende Eigenwertanalyse ist immer durchzuführen, wenn die geometrische Nichtlinearität in der Berechnung berücksichtigt wird.

Der wesentliche Unterschied zum MNA/LBA-Konzept ist die explizite Einbeziehung der Imperfektion in die Berechnung anstelle eines pauschalen Beulabminderungsfaktors χ . Der Kern beim Beulsicherheitsnachweis liegt in der anzusetzenden Ersatzimperfektion. Die zufällig verteilten Imperfektionen realer Schalen sollten durch die Ersatzimperfektion äquivalent beschrieben werden. Da es die „ungünstigste“ Imperfektion nicht gibt (SCHNEIDER u. a. 2005b), müssen geeignete Formen untersucht werden. In DIN EN 1993-1-6 Abs.8.7.2.(13-14) werden mit der

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

eigenformaffinen und der konstruktionsspezifischen Imperfektion zwei verschiedene Imperfektionsformen genannt. Ebenfalls sind nach DIN EN 1993-1-6, NA.8.7.2.(16) die kollapsaffine oder die nachbeulaffine Imperfektionsform zu berücksichtigen (s. SCHNEIDER 2006; SCHNEIDER u. a. 2005a). Da sich die Imperfektionsamplitude bei der Berechnung mittels GMNIA-Berechnung nicht proportional zur Beullast verhält, muss zusätzlich überprüft werden, ob die Traglast bei einer um 10% geringeren Imperfektionsamplitude kleiner wird.

Die konkrete Ermittlung des Lastfaktors $r_{Rk,GMNIA}$ ist in der Norm geregelt. Dementsprechend gelten folgende vier Kriterien gemäß Abbildung 2.13((DIN EN 1993-1-6 2010)).

- Kriterium C1: Maximallast der Lastverformungskurve (Grenzlast)
- Kriterium C2: Verzweigungslast, falls die Gleichgewichtsverzweigung auf dem Belastungspfad vor Erreichen des Maximums der Lastverformungskurve erfolgt;
- Kriterium C3: zur größten tolerierbaren Verformung gehörende Last, falls diese Verformung vor Erreichen einer Verzweigungslast oder einer Grenzlast erreicht wird.
- Kriterium C4: Last, bei der die Vergleichsspannung am höchstbeanspruchten Punkt der Schalenoberfläche den Bemessungswert erreicht.

Der Lastfaktor entspricht dem kleinsten Wert nach den Kriterien C1, C2 und C3. Bedingung C4 gilt lediglich als Zusatzbedingung für eine konservative Bemessung mittels einer GNIA-Berechnung, da die plastischen Tragreserven nicht berücksichtigt werden. Für die größte tolerierbare Verformung empfiehlt sich eine maximale örtliche Verdrehung von 0.1 im Bogenmaß. Schließlich wird die Zuverlässigkeit des ermittelten Beulwiderstands $r_{Rk,GMNIA}$ bezüglich des FE-Modells, der verwendeten Algorithmen und des gewählten Imperfektionsansatzes nach DIN

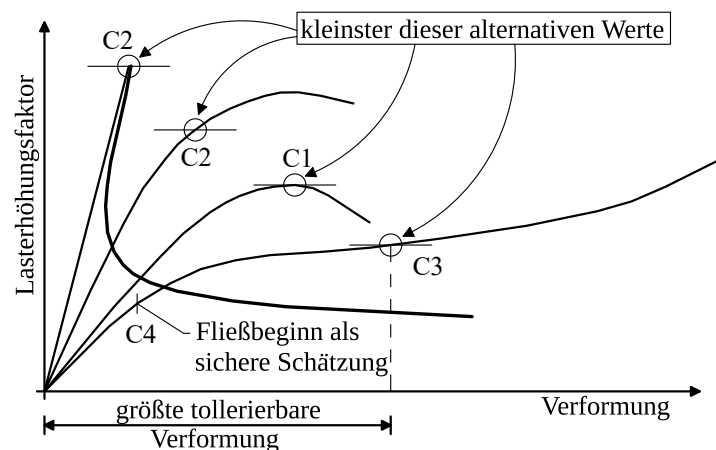


Abb. 2.13: Definition des Lasterhöhungsfaktors $r_{Rk,GMNIA}$ nach (DIN EN 1993-1-6 2010)

2 Exzentrische Entleerung von Silos

EN 1993-1-6 Abs.8.7.2(23) mithilfe eines Kalibrierungsfaktors k_{GMNIA} überprüft. Dieser wird folgendermaßen bestimmt:

$$k_{GMNIA} = \frac{r_{Rk,known,check}}{r_{R,GMNIA,check}} \quad \text{und} \quad k_{GMNIA} = \frac{r_{R,test,known,check}}{r_{R,GMNIA,check}} \quad (2.27)$$

Der experimentell ermittelte Kalibrierungsfaktor darf keinen Wert größer 1,0 annehmen. Liegt $r_{R,GMNIA}$ für das Verfahren mit dem Vergleichsbeulfall außerhalb des Bereiches $0,8 < r_{R,GMNIA} < 1,2$, ist der ermittelte Beulwiderstand als ungünstig zu betrachten, sodass weitere Untersuchungen zur Abklärung der Ursachen durchgeführt werden müssen.

2.4.2 Numerisches Berechnungsmodell

Die numerischen Berechnungen in dieser Arbeit wurden mit dem Programm ABAQUS durchgeführt. Besonders im Bereich nichtlinearer Analysen gilt ABAQUS als eine der führenden Programme. Bei der Modellierung der Schalenstruktur wird das Element S9R5 verwendet. Im Gegensatz zu dem von ABAQUS bereitgestellten S8R5 Element besitzt das S9R5-Element einen zusätzlichen Knoten in Elementmitte. Somit besitzt das Element neun Knoten mit jeweils fünf Freiheitsgraden, drei Translationen und zwei Rotationen. Dieses Element ist besonders geeignet für gekrümmte Schalen und wurde bereits bei der Stabilitätsuntersuchung dünnwandiger Silos erfolgreich eingesetzt (SADOWSKI u. a. 2011a). Zur Ermittlung der Lastfaktoren in der numerischen Berechnung wird das Bogenlängenverfahren (arc-length method) als Pfadverfolgungsalgorithmus benutzt (RIKS 1979).

Es werden zwei Silos (Abbildung 2.10) untersucht, eins mit konstanter Wanddicke (Silo I) und einer mit abgestufter Wanddicke (Silo II). Das Silo wird für den Lastfall „symmetrische Entleerungslasten“ zuzüglich der Teilflächenlast ausgelegt, aus denen sich die axiale Membranspannung ergibt. Die Ermittlung der erforderlichen Dicke erfolgt dadurch, dass die resultierende axiale Spannung am unteren Rand des jeweiligen Schusses den Beulwiderstand der gewählten Dicke nicht überschreitet. Alle Schalensegmente sind 2 m lang (Abbildung 2.14). Aufgrund der Achsensymmetrie wird nur die Hälfte der Schale modelliert. Am oberen Ende ist der Schaft an einem 15° geneigten Dach angeschlossen. Das Dach gilt als horizontale obere Lagerung und Aussteifung für die Schale. Der untere Rand ist gelenkig gelagert. Für alle Untersuchungen werden die Materialeigenschaften eines Baustahls S235 ($f_y = 235 \text{ N/mm}^2$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$) angenommen. Es handelt sich hierbei um ein ideal elastisch-plastisches Modell ohne kinematische Verfestigung. Da die Imperfektionen großen Einfluss auf die Tragwirkung haben, ist der Ansatzform sowie der Imperfektionsamplitude besondere Beachtung zu schenken. Zur Identifikation des maßgebenden Imperfektionssansatzes wurden unterschiedliche Formen angesetzt.

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

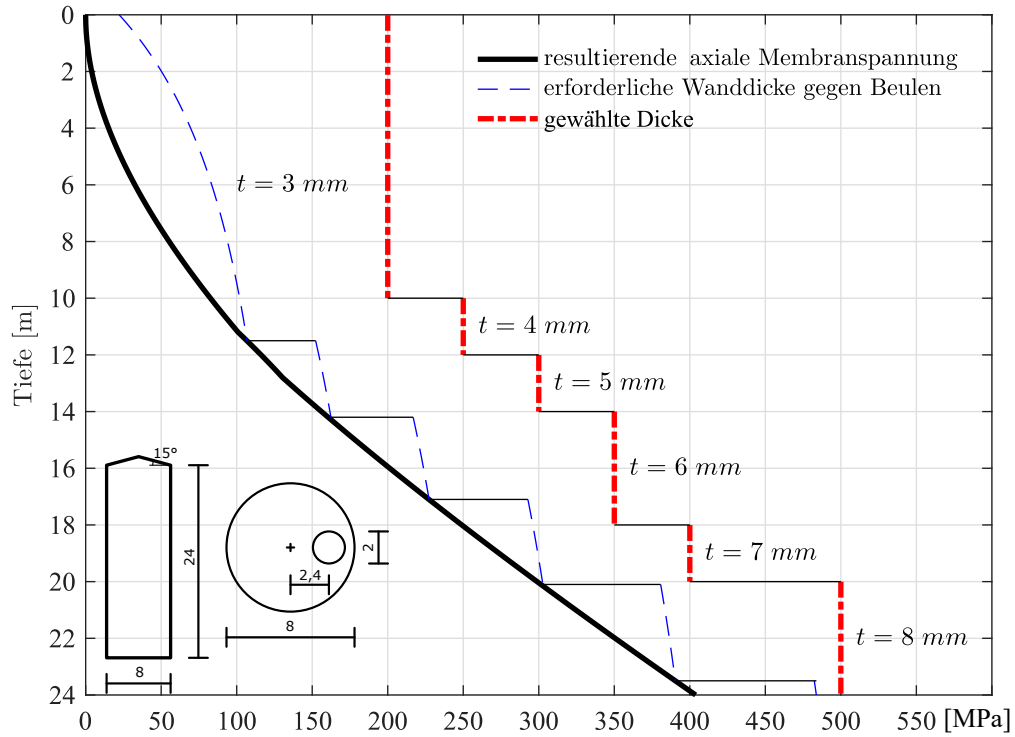


Abb. 2.14: Resultierende Axialspannung

Die üblichen zu untersuchenden Imperfektionsformen sind eigenformaffine, kollapsaffine und konstruktiv bedingte Imperfektion aus Schweißnahteinzug (ROTTER u. a. 1989). Bei konstruktiv bedingter Imperfektion geschieht das Aufbringen der Imperfektion in der Modellierung.

Die Imperfektionsform aus Schweißnahteinzug lässt sich nach (ROTTER u. a. 1989) wie folgt beschreiben:

$$\delta = \delta_0 e^{-\pi x/\lambda} \left(\cos \frac{\pi x}{\lambda} + \sin \frac{\pi x}{\lambda} \right) \quad (2.28)$$

mit:

$$\lambda = \frac{\pi \sqrt{Rt}}{[3(1 - \nu^2)]^{0,25}} \quad (2.29)$$

Die Imperfektionsamplituden wurden in Abhängigkeit der Schalendicke nach Gleichung 2.23 berechnet. Die Schale wird der Herstelltoleranzklasse C (Normal) zugeordnet. Für das Silo mit konstanter Dicke ergibt sich eine Amplitude von 11,2 mm. Zwischen jedem Segment, bzw. alle zwei Meter, wurde eine Imperfektion aufgebracht. Bei eigenformaffiner und kollapsaffiner Imperfektionsform wird die Imperfektion durch Verwendung einer Eigenform mit einer LBA-Berechnung oder einer kollapsaffinen Form mittels der GMNA-Berechnung mittels eines Skalierungsfaktors auf das perfekte System aufgebracht, sodass die maximale Vorverformung in radialer Richtung bei allen Ansätzen identisch wird.

2.4.3 Stabilitätsuntersuchung unter symmetrischer Entleerung

In diesem Kapitel handelt es sich bei allen Lasten um charakteristische Werte. Die Teilflächenlast wird vernachlässigt, um das Tragverhalten des Silos unter symmetrischen Entleerungslasten zu untersuchen. In der Norm ergeben sich die Entleerungslasten aus der Erhöhung der Fülllasten durch einen Entleerungsfaktor. Bei schlanken Silos der Anforderungsklassen 2 und 3, wie hier der Fall, beträgt der Faktor für die Horizontallast und die Wandreibungslast jeweils 1,15 und 1,1. Abbildung 2.15 zeigt die Entleerungslasten nach DIN EN 1991-4 und die aus der numerischen Simulationen im stationären Zustand. Da sich ein gedachter Fließkegel während des Entleerens einstellt, entstehen am Übergang zum „Trichter“ aufgrund der Spannungsumlagerung große Horizontallasten. Im oberen Bereich, wo sich das Schüttgut gleichmäßig nach unten bewegt, bleiben die Spannungen wie im Füllzustand nahezu unverändert.

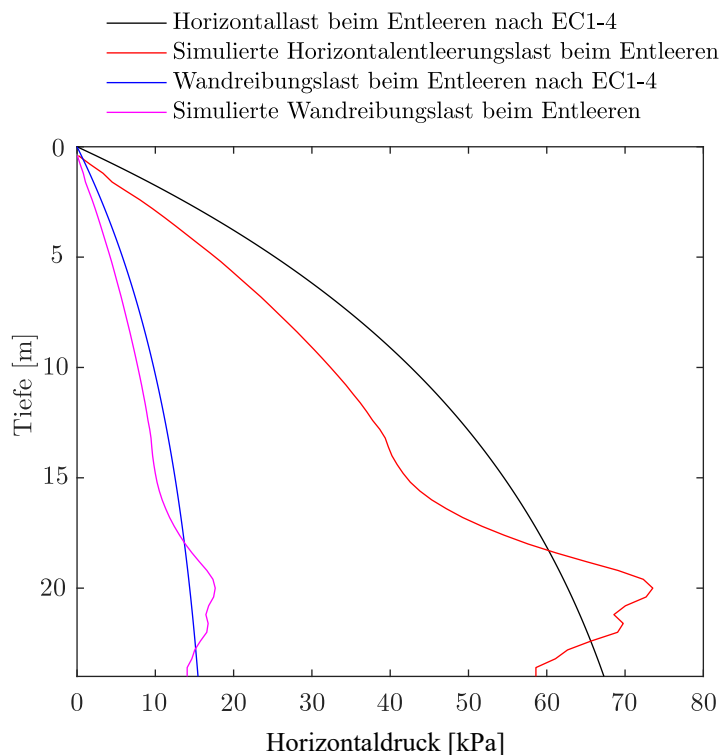


Abb. 2.15: Vergleich der Entleerungslasten nach EC1-4 und FEM

In Tabelle 2.5 wurden alle Lastfaktoren der Berechnungskonzepte zusammengefasst. Bei einem Vergleich zwischen den simulierten und den Normlasten ergibt sich, dass alle Lastfaktoren mit simulierter Last über den Lastfaktoren mit den Normlasten liegen. Vergleicht man die LBA- und MNA-Lastfaktoren, lässt sich feststellen, dass die Plastizität stark involviert ist. Dies lässt sich auch anhand der sehr unterschiedlichen GNA- und GMNA-Lastfaktoren bestätigen. In Abbildung 2.18 sind die Last-Verformungs-Diagramme dargestellt. Aufgetragen ist der Lastfaktor und die vertikale Verformung an der Dachspitze. In Abbildung 2.16 kann man erkennen,

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

Tab. 2.5: Übersicht der Lastfaktoren bei symmetrischer Entleerungslast nach EN1-4 und simulierter Last

	LBA	MNA	GNA	GMNA
Silo I norm	8,91	4,37	8,15	3,60
Silo I simu	9,70	4,73	8,86	3,91
Silo II norm	5,90	3,62	5,88	3,38
Silo IIsimu	7,46	4,42	7,44	3,91

dass der Faktor für die MNA-Berechnung eine asymptotische Annäherung ist und das Silo sich ohne Imperfektion linear verhält und schlagartig versagt. Das geradlinige Fließplateau aus der MNA-Berechnung suggeriert, dass in den Schalen ein gleichmäßig verteilter Spannungszustand herrscht.

Vergleichsberechnungen haben gezeigt, dass die Eigenwerte dicht nebeneinander und die Beulstellen nachfolgender Eigenformen in dem gleichen Bereich liegen. Dies zeigte wiederum, dass das Silo unter symmetrischer Last sehr imperfektionsempfindlich ist. In der Norm ist für R_{cr} der niedrigste erhaltende Eigenwert zu verwenden, es wurde jedoch von SCHMIDT 2012 empfohlen, sich mehrere Eigenformen anzuschauen, da ein etwas höherer Eigenwert im deutlich imperfektionsanfälligen Bereich maßgebend sein könnte. Wenn die erste Eigenform kein globales Versagen impliziert oder im imperfektionsunanfälligen Bereich auftritt, müssen in jedem Fall höhere Eigenwerte in Betracht gezogen werden, um eine sichere Bemessung zu ermöglichen.

Schwierigkeiten bei der Anwendung des LBA/MNA-Konzeptes liegen in der Wahl des Beulabminderungsparameters χ_{ov} und der Bestimmung des plastischen Referenzwiderstands r_{Rpl} . Unter zentrischer Last entsprechen alle Versagensformen der LBA- und MNA-Berechnungen dem axialen Beulen. Somit können die Abminderungsfaktoren der Basisbeulfälle herangezogen werden. Für die LBA-Berechnung wirkt sich der Innendruck kaum auf die ideale Axi-

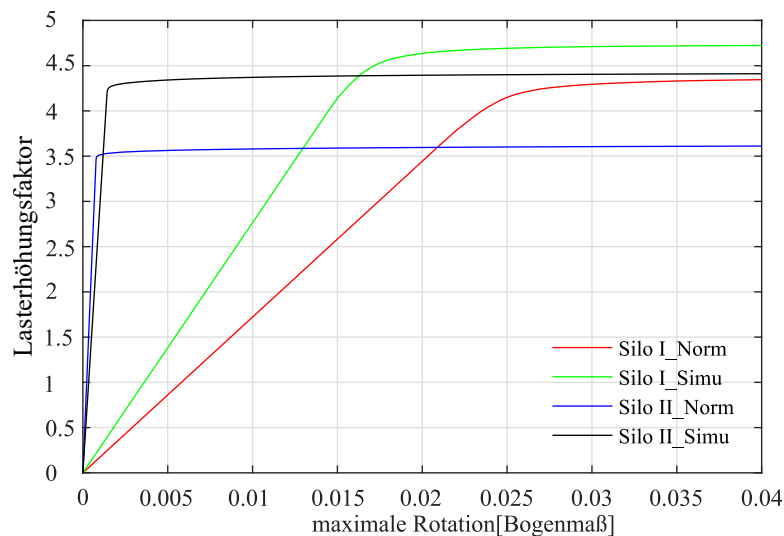


Abb. 2.16: Lastverformungsdiagramme der MNA-Berechnungen

2 Exzentrische Entleerung von Silos

alldruckspannung aus, weshalb die Abminderungsfaktoren analog zu dem spannungsbasierten Nachweis unter Berücksichtigung des Innendrucks ermittelt werden. Theoretisch ändert sich der Beulabminderungsparameter bei jedem Lastfaktor im Axialdrucknachweis, weil R_{Rpl} größer ist als 1,0 und somit der Innendruck bei R_{Rpl} größer als der im Entleerungszustand ist. In ROTTER u. a. 2013 erfolgte die Ermittlung des Abminderungsfaktors für den Entleerungszustand unter Berücksichtigung des gleichzeitig wirkenden Innendruckes aus dem Füllzustand. Für die Berechnung mit der simulierten Entleerungslast wird der Abminderungsfaktor aus dem Entleerungszustand ermittelt. Weil das Silo I am Ende des letzten Schusses versagt, würde sich lediglich ein Abminderungsfaktor $\alpha_{xpe} = 0,178$ statt 0,262 mit dem simulierten Füllzustand ergeben. In dieser Arbeit wird der Innendruck konsistent für alle Untersuchungen vereinfacht aus dem Entleerungszustand entnommen; nur wenn der MNA-Lastfaktor kleiner als 1,0 ist, wird der Beulabminderungsfaktor iterativ entsprechend dem an dem Lastfaktor angepassten Innendruck berechnet. In Tabelle 2.6 sind die einzelnen Komponenten für den Nachweis mittels des LBA/MNA-Konzepts zusammengefasst.

Tab. 2.6: Übersicht der Lastfaktoren mittels LBA/MNA-Konzept

	r_{Rcr}	r_{Rpl}	r_{Rpl}^*	$\lambda_{ov,p}$	α_{pe}	$\overline{\lambda_{ov,p}}$	Beulfall	χ	r_{Rk}
Silo I norm	8,91	4,37	4,11	0,70	0,262	0,81	el/pl	0,51	2,23
Silo I simu	9,70	4,73	4,50	0,70	0,262	0,81	el/pl	0,51	2,41
Silo II norm	5,90	3,62	3,49	0,78	0,393	0,99	el/pl	0,56	2,02
Silo II simu	7,46	4,42	4,25	0,77	0,304	0,87	el/pl	0,49	2,17

Die Ermittlung des plastischen Referenzwiderstands wird strittig diskutiert. Normativ wird der Endwert R_{Rpl} einer MNA-Berechnung gefordert. Alternativ kann als konservative Lösung der Wert r_{Rpl}^* auf Grundlage einer linearen Berechnung mit der Formel 2.24 abgeschätzt werden. Die beiden ermittelten Werte gelten als der maximale bzw. minimale Referenzwiderstand. Abbildung 2.16 zeigt das typische MNA-Lastverformungsdiagramm unter gleichförmiger Membranspannung. In diesem Fall unterscheiden sich beide Referenzwiderstände um höchstes 6%. Da die Verformungen vor dem Erreichen des Maximalwerts in einem sehr kleinen Bereich liegen, ist es hier gerechtfertigt, R_{Rpl} als Referenzwert zu verwenden.

Beim LBA/MNA-Konzept weisen die beiden Analysen häufig unterschiedliche Versagensmuster auf oder die Versagensmuster liegen in unterschiedlichen Bereichen, wie es hier beim abgestuften Silo mit der simulierten Last der Fall ist. Das Versagensmuster der MNA zeigt aufgrund der großen Ringzuglast den Bereich der maximalen Horizontallast auf, während der niedrigste Beuleigenwert am Ende des 3 mm-Schusses auftritt (Abbildung 2.17). (ROTTER 2011) schlug vor, in jedem Fall den unteren Wert anzusetzen. In diesem Fall wird der Abminderungsfaktor für beide Stellen ermittelt. Es hat sich ergeben, dass das MNA-Versagensmuster imperfectionsanfälliger und somit maßgebend für den Nachweis ist. Mit der hieraus bestimmten

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

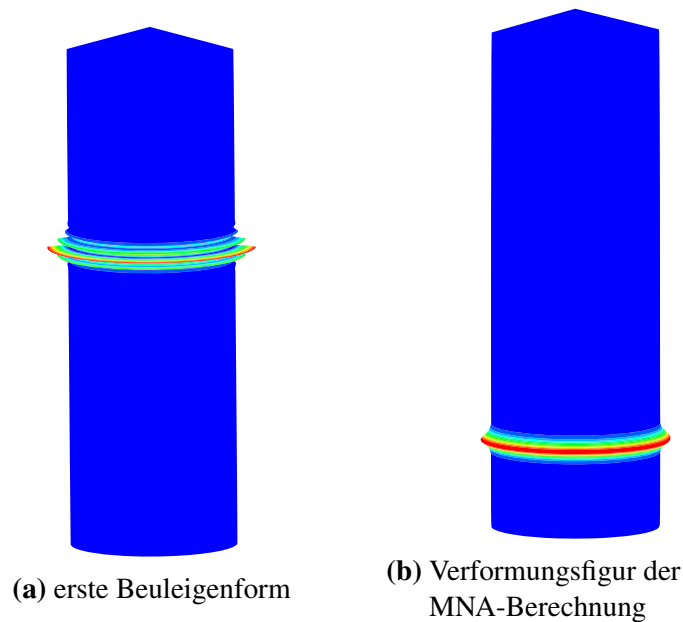


Abb. 2.17: Beulmuster und Versagsmuster des LBA/MNA-Konzeptes (Silo II)

bezogenen Schlankheit lassen sich alle Beulfälle im teilplastischen Bereich einordnen. Nach dem MNA/LBA-Konzept liegen alle Lastfaktoren knapp unterhalb des Sicherheitskoeffizienten $1.65 * 1.2 = 1,98$. Die aus dem Konzept resultierenden Ergebnisse sind plausibel und überzeugend.

In Kapitel 2.4.1 wurde erläutert, dass der Imperfektionsansatz eine entscheidende Rolle bei der GMNIA-Berechnung spielt. Zur Identifikation des maßgebenden Imperfektionsansatzes wurden drei Imperfektionsformen angesetzt. Neben der ersten Eigenform und der kollapsaffinen Imperfektionsform entsprechend der GNA-, GMNA-Versagensform wurde auch die konstruktive Imperfektionsform aus Schweißnahtzug untersucht. In Tabelle 2.7 sind die Lastfaktoren aufgelistet. Es ist deutlich zu erkennen, dass die erste Eigenform bei zentrischer Entleerung die maßgebenden Lastfaktoren liefert. Jedoch ist dieser Ansatz zu ungünstig, weil die tatsächlich vorhandene Imperfektion weit entfernt von der Eigenform ist (ROTTER 2004). Die Last-Verformungs-Kurve in Abbildung 2.18 mit den unterschiedlichen Imperfektionsformen zeigt ein deutlich nichtlineares Verhalten. Dabei implizieren die GNIA- und GMNIA-Berechnungen mit eigenformaffiner Imperfektion eine niedrige Anfangssteifigkeit.

Tab. 2.7: Lastfaktoren mit unterschiedlichem Imperfektionsansatz;
 * - eigenformaffin; † - kollapsaffin; ‡ - konstruktiv

	GNA	GNIA *	GNIA †	GNIA ‡	GMNA	GMNIA *	GMNIA †	GMNIA ‡
Silo I norm	8,15	3,78	5,29	6,72	3,60	1,61	2,25	3,35
Silo I simu	8,86	4,17	5,71	7,49	3,91	1,75	2,45	3,56
Silo II norm	5,88	2,04	2,96	4,64	3,38	1,26	2,56	2,54
Silo II simu	7,44	2,53	3,66	5,82	3,91	1,60	2,45	3,28

2 Exzentrische Entleerung von Silos

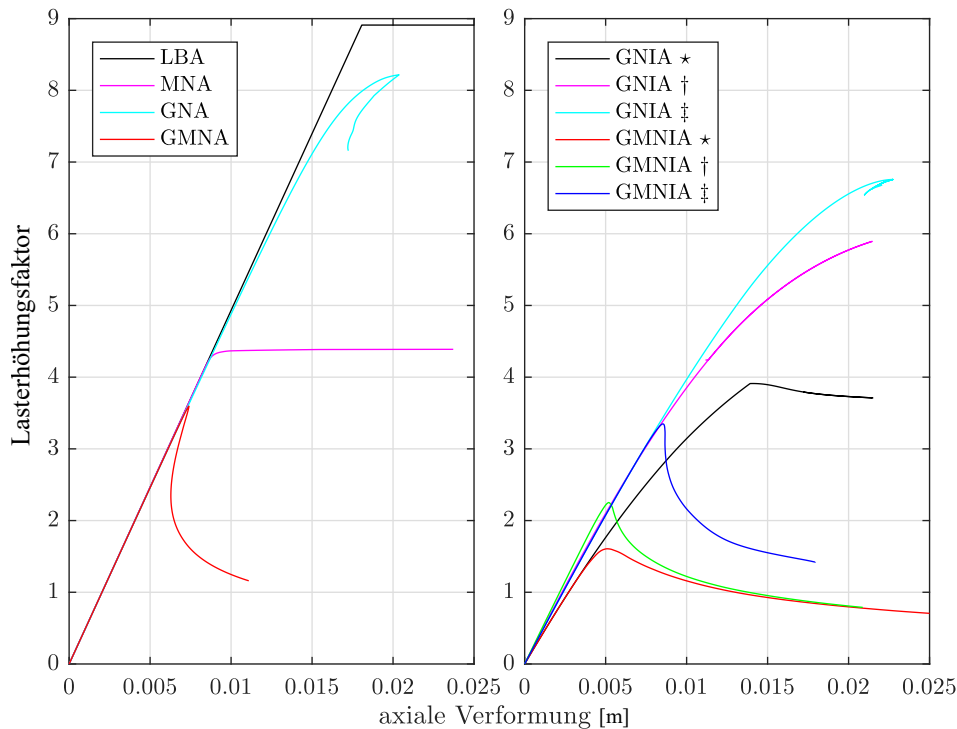


Abb. 2.18: Last-Verformungsdiagramme für Silo I unter zentrischer Entleerungslast nach EC1-4;
 \star - eigenformaffin; \dagger - kollapsaffin; \ddagger - konstruktiv

SADOWSKI u. a. 2011b untersuchten Silos unter symmetrischer Entleerungslast mit unterschiedlicher Schlankheit. Für die Untersuchungen hat er den Ansatz aus der Schweißbeule gewählt und stellte fest, dass der GMNIA-Faktor den Sicherheitsfaktor 1,65 deutlich überschreitet und der spannungsbasierte Nachweis zu konservativ sei. Laut seiner Untersuchung wurde die Traglast bei einem abgestuften Silo mit einer Schlankheit von 3 um 19% abgemindert. Diese Kenntnis kann hier bestätigt werden. Die Traglast nach GMNIA-Berechnung wurde hierbei lediglich um 12% bzw. um 19% im Vergleich zur GMNA-Berechnung mit simulierter Last abgemindert. Die nach dem MNA/LBA-Konzept berechneten Lastfaktoren stimmen sehr gut mit dem kollapsaffinen Imperfektionsansatz überein.

Für die Silos mit konstanter Dicke ist die kritische Beulstelle fast immer am unteren Rand des Silos (Abbildung 2.19), weil die Membrandruckkraft von oben nach unten stetig steigt. Bei der GMNIA-Berechnung mit einer konstruktiven Imperfektionsform versagt das Silo am oberen Rand des letzten Schusses, wo eine Imperfektion angeordnet ist. Anhand aller drei GMNIA-Berechnungen lässt sich feststellen, dass die Versagensform hauptsächlich von der aufgetragenen Imperfektionsform abhängt. Bei dem Silo mit abgestufter Wanddicke ist die Versagensform entweder am unteren Rand des Schusses mit einer Dicke von 3 mm oder bei der kollapsaffinen Imperfektionsform in Nähe des Silobodens (Abbildung 2.20).

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

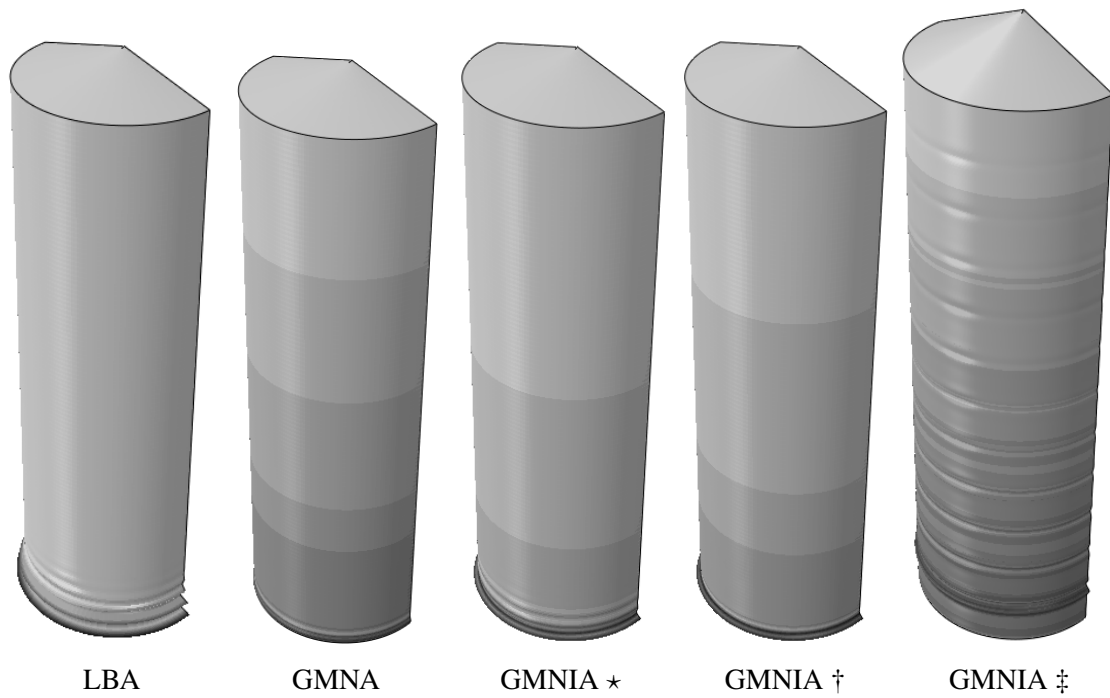


Abb. 2.19: Beulformen des Silos I mit konstanter Dicke unter simulierter achsensymmetrischer Last

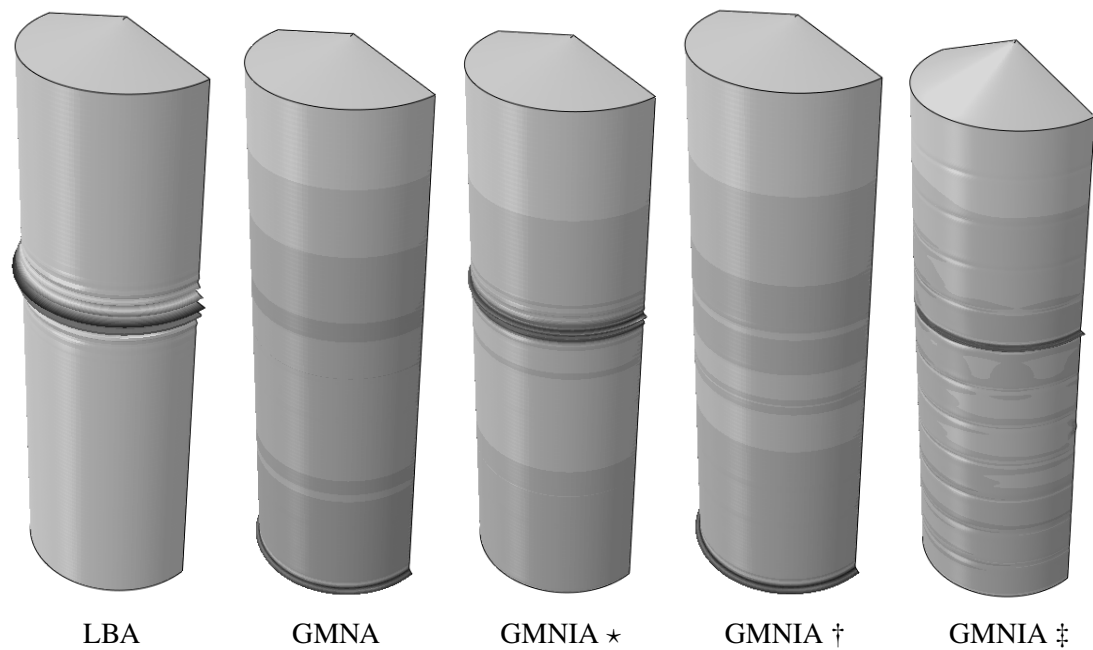


Abb. 2.20: Beulformen des Silos II mit abgestufter Dicke unter simulierter achsensymmetrischer Last

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Silo unter zentrischer Entleerung ein Stabilitätsproblem hat. Die Lastfaktoren mit der simulierten Last zeigen, dass der Normansatz auf der sicheren Seite liegt. Der Nachweis unter simulierter Last ist sowohl nach dem MNA/LBA-Konzept als auch nach der GMNIA-Berechnung erbracht. Ein Problem ergibt sich, wenn die Teilflächenlast bei der numerisch gestützten Methode berücksichtigt wird. Da bei zentrischer Entleerung eine Berücksichtigung der Teilflächenlast erforderlich ist, ist damit zu rechnen, dass der Nachweis normgerecht mit numerisch gestützten Methoden nicht erfüllt werden kann. Es zeigt sich, dass ein immenser Forschungsbedarf an der Stabilität von Schalen besteht.

2.4.4 Stabilitätsuntersuchung unter exzentrischer Entleerung

Die Horizontallasten unter exzentrischer Entleerung wurden vom Fließkanal abgeleitet. Da die Normen von einem Fließkanal parallel zur Wand ausgehen, sind künstlich erzeugte, nicht membranrechte Spannungssprünge vorhanden, die eine Umfangsbiegung erzeugen. Die überproportional erhöhte Horizontallast (Abbildung 2.9) verursacht große Wandreibungslasten, die zu einem Axialbeulen führen. SADOWSKI u. a. 2011c untersuchte diesen Lastfall gründlich und kam zu dem Schluss, dass der Lastfaktor mit einer geometrisch nichtlinearen Analyse (GNA) 9-fach höher als der einer linearen Analyse (LBA) sei und sich der GNIA Faktor mit einer Imperfektion bis zur 17-fachen Last der perfekten Schale (GNA) gesteigert habe. Sowohl die eigenformaffine als auch die kollapsaffine und die konstruktive Imperfektionsform aus dem Schweißnahtverzug können zu einer Lasterhöhung führen. Der versteifende Effekt aus der Imperfektion ist auf die Imperfektionsform zurückzuführen. Da die Imperfektion lokal wie ein Wellblech fungiert, erhöht sich die Steifigkeit in Umfangsrichtung wodurch sich die globale Tragfähigkeit erhöht. Diese Erkenntnisse wurden anhand eigener Berechnungen bestätigt. In diesem Kapitel wird nur der Ansatz der nachbeulaffinen Imperfektion untersucht.

In Tabelle 2.8 sind alle Lastfaktoren aufgelistet. Zusätzlich wird das Abbruchkriterium C3 für das Erreichen der Verdrehung $\beta = 0,1$ überprüft. Wegen der großen Verformung aus der Bie-

Tab. 2.8: Lastfaktoren mit verschiedenen Fließkanälen nach EC1-4 ;
*:nachbeulaffine Imperfektion; •:C3-Kriterium

K_c	Silo I				Silo II			
	0	0.25	0.40	0.60	0	0.25	0.40	0.60
LBA	8.91	0.95	0.43	0.42	5.90	0.13	0.09	0.16
MNA	4.37	0.68	0.68	0.86	3.62	0.37	0.33	0.48
GNA	8.15	3.68	1.60	0.38	5.88	0.47	0.09	0.19
GNIA*	4.82	7.21	1.42	0.30	2,85	6.28	0.13	0.20
GMNA	3.60	2.48	0.78	0.38	3.38	0.47	0.09	0.19
GMNIA*	1.78	2.08	1.30	0.30	1,60	2.14	0.20	0.20
GMNIA•	1,78	1,68	0.41	0.30	1,60	0,45	0.06	0.10

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

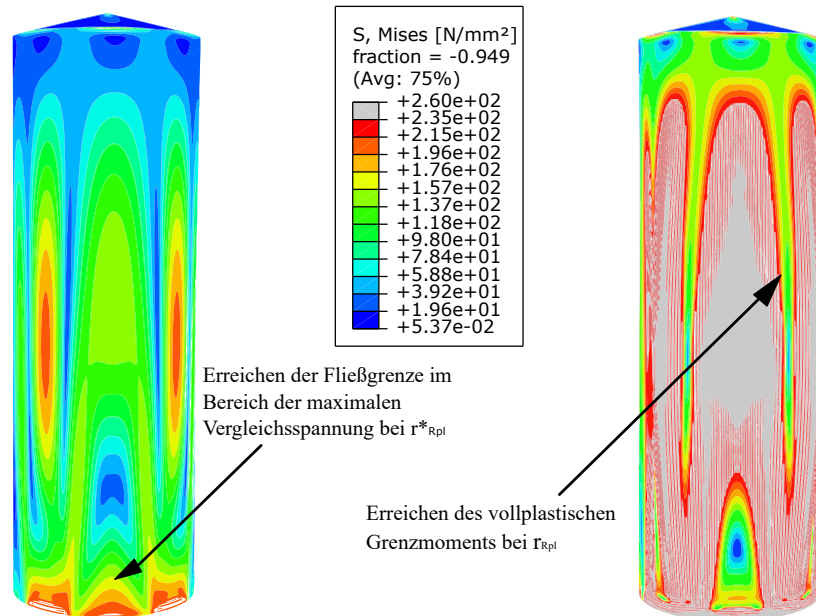


Abb. 2.21: Vergleichsspannung der MNA-Berechnung bei unterschiedlichem Referenzwiderstand für $G=0,6$ (Silo I)

gung wird dieses Kriterium maßgebend. Der versteifende Effekt bei den Fließkanälen 0,25 und 0,4 ist anhand der deutlich größeren GNIA-Faktoren zu erkennen (Tabelle 2.8). Beim Silo II mit einem Fließkanal von $G = 0,25$ beträgt der GNA-Faktor 0,47. An der Stelle wurde eine Verzweigungslast aufgespürt. Mit einer Imperfektion geht der Verzweigungspunkt verloren. Bei diesem Lastfaktor geht das Silo nahtlos vom Vorbeulzustand zum Nachbeulzustand über. Beim Fließkanal mit $G = 0,6$ unterscheiden sich die GNIA und GMNIA-Faktoren nicht. Dies deutet auf ein rein elastisches Beulen hin. Die Schwierigkeit des LBA/MNA-Konzepts liegt in der Ermittlung des plastischen Referenzwiderstands. Wegen der fehlenden geometrischen Nichtlinearität verformt sich das Silo aufgrund der hohen Biegung in einen unrealistischen Zustand. Laut SCHNEIDER 2006 wird der Beulwiderstand deutlich überschätzt, weil die Fließgrenze im Bereich des Versagensmusters deutlich früher erreicht wird als das vollplastische Grenzmoment

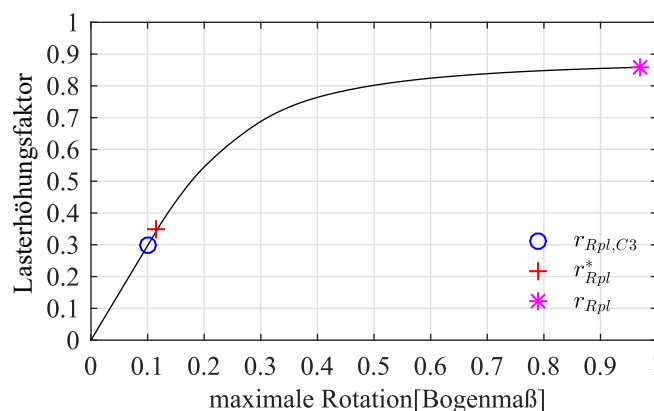


Abb. 2.22: Lastverformungsdiagramme der MNA-Berechnungen beim Fließkanalverhältnis $G=0,6$ für das Silo I

2 Exzentrische Entleerung von Silos

R_{Rpl} . Nach GETTEL 2008 ist es schlüssiger, für Zylinder unter Biegebeanspruchung den Schätzwert r_{Rpl}^* als Referenzwiderstand zu wählen. Abbildung 2.21 zeigt die Vergleichsspannungen der MNA-Berechnung bei zwei Referenzwiderständen für das Silo I. Zusätzlich wird die Zulässigkeit des C3-Kriteriums der GMNIA-Berechnung auf dieses Konzept überprüft. Die örtliche Verdrehung ist bei jedem Lastfaktor auf 0,1 rad beschränkt. Abbildung 2.22 zeigt die drei Referenzwiderstände nach dem jeweiligen Kriterium. Es ist deutlich zu erkennen, dass R_{Rpl} , im Gegensatz zu Tabelle 2.6, r_{Rpl}^* und R_{Rpl}^{C3} deutlich überschreitet. Der maßgebende Referenzwiderstand beträgt nur 0,30. Dieser Wert entspricht nur 7,3% des Wertes unter zentrischer Entleerung. Aufgrund des geringen Referenzwiderstands ist nach dem LBA/MNA-Konzept kaum noch Tragfähigkeit vorhanden, genau wie bei der GMNIA-Berechnung.

Für den spannungsbasierten Nachweis sind die Membranspannungen maßgebend. Abbildung 2.23 zeigt die relevante Axialmembranspannung und die Vergleichsspannung. Im Auslaufbereich sind große Zugspannungen vorhanden und am Fließkanal ergibt sich aufgrund der erhöhten Wandreibungskraft eine Axialmembrandruckspannung von $687,5 \text{ N/mm}^2$, mit der der spannungsbasierte Nachweis praktisch nicht mehr zu erbringen ist. Bei zentrischer Entleerung beträgt die maximale Axialspannung lediglich $29,8 \text{ N/mm}^2$. Für Betonsilos führen die Querkkräfte und die daraus entstehenden Biegebeanspruchungen zu erheblichen Bemessungsproblemen.

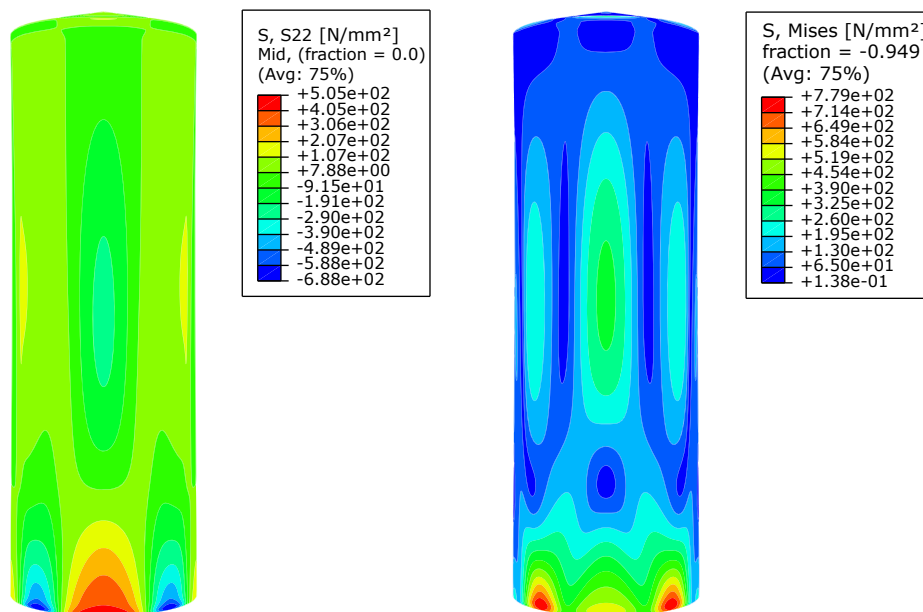


Abb. 2.23: Spannungen aus der LA-Berechnung beim Fließkanalverhältnis $G=0,6$ für das Silo I; links: axiale Membranspannung, Rechts: Vergleichsspannung

Die Schwierigkeiten bei der Umsetzung und die Auswirkungen des Ansatzes auf Betonsilos werden aktuell bezüglich der konstruktiven Ausbildung und Kosten stark diskutiert (RUCKENBROD u. a. 2011; EHMANN u. a. 2016). Anhand der numerischen Untersuchung kann festgestellt

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

werden, dass die Exzentrizität nach der Norm einen dramatischen Abfall der Tragfähigkeit für Metallsilos verursacht. *Der Tragwerksplaner wird in ein zu enges Korsett gedrängt, mit dem eine wirtschaftliche Bemessung nicht mehr möglich ist* (KALDENHOFF u. a. 2013).

Als nächstes wird das Silo numerisch entleert. In den nachfolgenden Kapiteln wird ausführlich auf die Simulation eingegangen. Da sich die Beanspruchung aus dem Schüttgut räumlich mit der Zeit verändert, ist es zweckmäßig, Lastbilder zu unterschiedlichen Zeitpunkten zu untersuchen. In diesem Kapitel werden die Horizontallasten bei einer Sekunde und sieben Sekunden nach dem Öffnen des Auflaufes untersucht. In Abbildung 2.24 sind die Horizontallasten räumlich in der Abwicklung dargestellt. Es stellt sich grundsätzlich ein ganz anderes Lastbild als in Abbildung 2.9 ein. Da das Schüttgut im unteren Bereich schräg in Richtung des Auflaufes fließt, ist zusätzlich zur axialen Richtung noch eine Wandreibungslast in Umfangsrichtung vorhanden. Hier wird vereinfacht angenommen, dass die Resultierende in axialer Richtung zeigt.

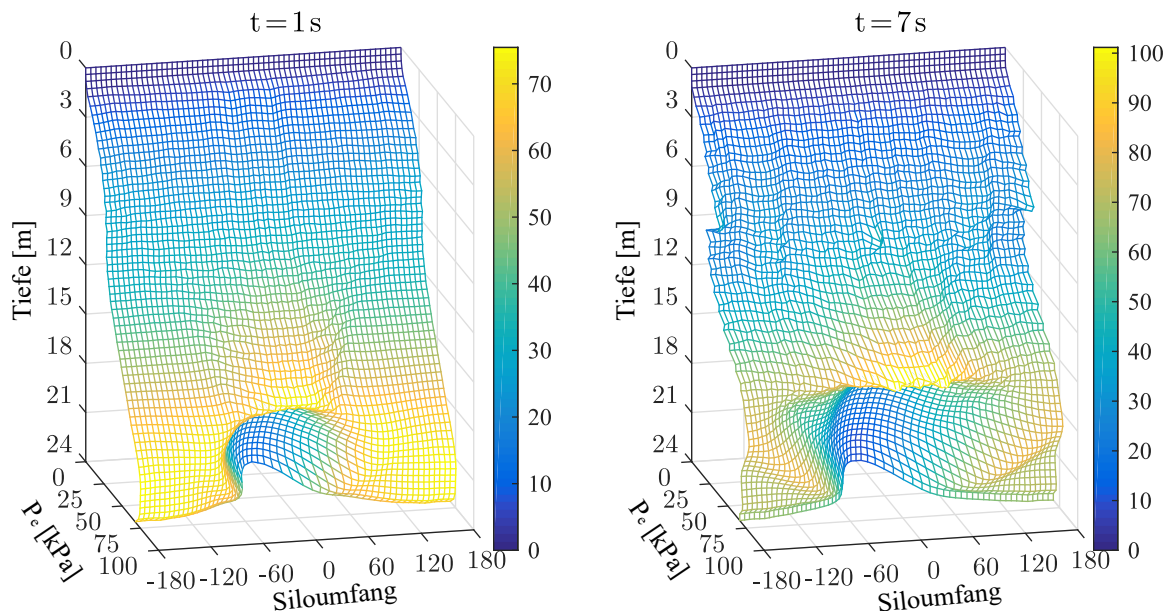


Abb. 2.24: Simulierte Horizontallasten im Anfangs- und stationären Zustand

Weil es für die GMNIA-Berechnung keine immer eindeutig maßgebliche Imperfektionsform gibt und das LBA/MNA-Konzept überzeugende Ergebnisse ergab, wird der Nachweis für das exzentrische Entleeren mittels MNA- und LBA-Berechnung durchgeführt. Die Referenzwiderstände für das Silo I werden wie oben beschrieben nach unterschiedlichen Kriterien ermittelt. Bei der Bestimmung des Beulabminderungsfaktors sind das Beulmuster und das Versagensmuster separat zu betrachten. Für den Basisbeulfall Schubbeulen und Umfangsbeulen sind der Abminderungsfaktor α_ϕ und α_τ nur abhängig von der Herstellqualität. Für die hier untersuchten Fälle ist das Meridianbeulen maßgebend. In Tabelle 2.9 sind die einzelnen Komponenten für den Nachweis mittels des LBA/MNA-Konzepts zusammengefasst.

2 Exzentrische Entleerung von Silos

Tab. 2.9: Übersicht der Lastfaktoren mittels des LBA/MNA-Konzeptes

t=1s	r_{Rcr}	Beulmuster	r_{Rpl}	r_{Rpl}^*	r_{Rpl}^{C3}	Versagen	r_{Rk}	r_{Rk}^*	r_{Rk}^{C3}
Silo I	6,20	axial	4,51	3,83	— ¹	axial	1,64	1,63	— ¹
Silo II	2,79	axial	3,56	3,01	1,12	axial	0,75	0,75	0,65
t=7s	r_{Rcr}	Beulmuster	r_{Rpl}	r_{Rpl}^*	r_{Rpl}^{C3}	Versagen	r_{Rk}	r_{Rk}^*	r_{Rk}^{C3}
Silo I	4,41	schub	4,33	3,11	2,24	axial	1,16	1,16	1,12
Silo II	0,85	axial	2,82	1,68	0,46	umfang	0,28	0,28	0,25

¹ die zulässige Verdrehung 0,1 rad wurde nicht erreicht.

Silos werden oft volumengesteuert entleert, um den dynamischen Effekt im Anfangszustand zu vermeiden. Der Lastfall im stationären Zustand ist aufgrund des hohen Axialdrucks maßgebend für die Bemessung. Bei Silo II beträgt der Lastfaktor nur 0,25. Weil die Wandreibungslast nicht kontinuierlich ansteigt, sondern nach Erreichen des maximalen Punktes abfällt, ist eine Ausführung mit abgestufter Dicke nicht sinnvoll. Außerdem ist mit großen Verformungen zu rechnen.

Bei der Versagensform vom Silo I handelt es sich um ein kombiniertes Beulen aus dem Axialdruckbeulen und dem Umfangsdruckbeulen (Abbildung 2.25). Die exzentrische Entleerung verursacht am Silofuß und in der Mitte zwei kritische Stellen. Für jede Stelle wird der Abminderungsfaktor unter entsprechendem Innendruck ermittelt. Der Beulabminderungsfaktor $\chi_{x,u}$ am Silofuss ist im Vergleich zu $\chi_{x,m}$ und $\chi_{\theta,u}$ der niedrigste und ergibt somit den geringsten Beulwiderstand. Überraschend ist, dass sich die Beulwiderstände nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Der Beulabminderungsfaktor χ^{C3} befindet sich auf der Beulkurve im elastisch-plastischen Bereich und ist größer als die Beulabminderungsfaktoren χ und χ^* , die sich im rein elastischen Bereich befinden. Aufgrund des kleineren Widerstands unterscheidet sich der Beulwiderstand r_{Rk} in diesem Fall nur geringfügig von r_{Rk}^* und r_{Rk}^{C3} . Dies setzt die Vereinfachung

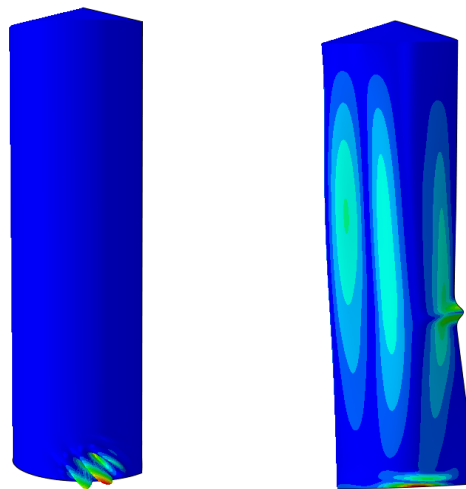


Abb. 2.25: Beulmuster und Versagensform für das Silo I, links: Schubbeulen LBA, Rechts: Axialdruckbeulen der MNA

2.4 Stabilitätsuntersuchung eines Stahlsilos infolge exzentrischer Entleerung

voraus, dass sich der Innendruck bei unterschiedlichen Lastfaktoren nicht ändert und somit der Imperfektionsabminderungsfaktor konstant bleibt. Betrachtet man das Silo I, wird die Tragfähigkeit im Vergleich zu der zentrischen Entleerung um 54% abgemindert.

Zusätzlich zu dem LBA/MNA-Konzept wird noch der spannungsbasierte Nachweis durchgeführt. Dieser Nachweis erfolgt mittels einer linearen Analyse und gliedert sich in die Durchführung der drei Einzelnachweise des Meridian-, des Umfangs- und des Schubbeulens, deren Widerstandswerten die vorhandenen Beulspannungen gegenübergestellt werden. Außerdem ist noch eine Interaktion der verschiedenen Spannungskomponenten zu berücksichtigen. Hier wird nur das Silo I beim Zeitpunkt $t = 7\text{ s}$ untersucht. Die Membranspannungen an der maßgebenden Stelle aus der zentrischen Entleerung, der exzentrischen Entleerung nach der Norm und der simulierten Lasten sind in Tabelle 2.10 dargestellt. Beim Fließkanalverhältnis $G = 0,6$ ist die Membranschubspannung im Vergleich zur maximalen Meridiandruckspannung ($687,5\text{ N/mm}^2$) dominierend. Aufgrund der übermäßig großen Spannungskomponenten lässt sich wiederum zeigen, dass das aktuelle Ingenieurmodell keine brauchbaren Ergebnisse liefert, mit denen der Ingenieur bei der Bemessungssituation „Entleerung mit großen Exzentrizitäten“ umgehen könnte. Aus der exzentrischen Entleerung wird eine Schubspannung hervorgerufen, deren Ausnutzungsgrad 0,51 beträgt. Im Vergleich zur zentrischen Entleerung verdoppelt sich die maximale Meridiandruckspannung und dominiert somit den Nachweis. Dies bestätigen die Ergebnisse des LBA/MNA-Konzepts, welche das Axialdruckbeulen am unteren Rand als größte Gefährdung identifizieren und somit das Schubbeulen aus der LBA eine sekundäre Rolle spielt.

Tab. 2.10: Membranspannung E_k und Beanspruchbarkeit R_k in $[\text{N/mm}^2]$

	zent. Entleerung		exz. Entleerung		G=0,60	
	E_k	R_k	E_k	R_k	E_k	R_k
σ_χ	29,83	67,37	56,05	66,62	188,07	66,73
σ_τ	0	23,50	16,07	23,50	224,28	23,50
Interaktion		0,44		1,25		59,38

Der Ausnutzungsgrad bei exzentrischer Entleerung beträgt 1,25. Eine direkte Umrechnung von dem Ausnutzungsgrad auf den Lastfaktor ist nicht möglich, da der Innendruck nichtlinear auf den Beulabminderungsfaktor wirkt und somit auch kein linearer Zusammenhang zwischen dem Ausnutzungsgrad und dem Lastfaktor besteht. Abbildung 2.26 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Ausnutzungsgrad und dem Lastfaktor für das Silo I. Der Lastfaktor ist mit 0,84 für den spannungsbasierten Nachweis im Vergleich zu r_{Rk}^* (weil r_{Rk}^* auch der LA-Berechnung entnommen wurde) sehr konservativ. Zum einen wurden die Beulinteraktionsparameter numerisch und experimentell mit konstanten beulrelevanten Membranspannungen auf der gesamten Zylinderfläche abgesichert (WINTERSTETTER u. a. 1999). In Silos herrscht fast nur ein veränderliches Membranspannungsfeld. Außerdem geht der Nachweis immer von einem lokalen Punkt aus,

2 Exzentrische Entleerung von Silos

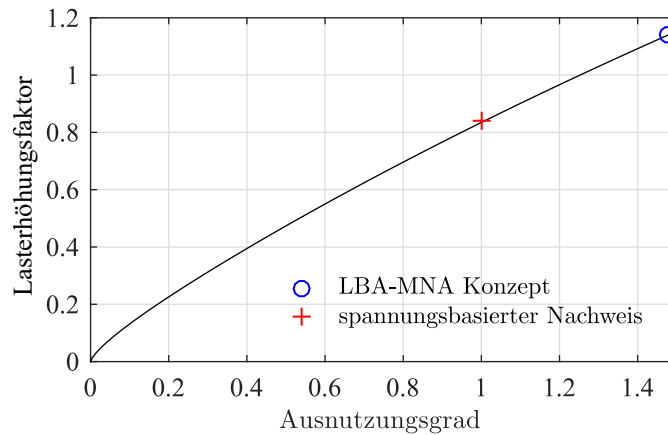


Abb. 2.26: Ausnutzungsgrad des spannungsbasierten Nachweises bezogen auf den Lasterhöhungsfaktor während sich eine Beule über eine Fläche ausdehnt. Zum anderen wird in dem Nachweisformat ausschließlich die Kombination aus der Membrandruckspannung mit der Umfangszugspannung erfasst.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen zeigen, dass die exzentrische Entleerung eine Bemessungssituation darstellt, die zwar die Tragfähigkeit der Schale deutlich abmindert, jedoch nicht zu einer unbeherrschbaren Bemessungssituation führt. Wählt man im Beispiel eine Dicke von 8 mm für die Silowand und das Dach, ergeben sich jeweils Lasterhöhungsfaktoren von 1,87 für r_{Rpl}^{C3} , 1,93 für r_{Rpl}^* und 1,97 für r_{Rpl} .

Schalenbeulen ist ein spezielles Themengebiet und das LBA/MNA- Nachweisformat verlangt im Vergleich zu dem spannungsbasierten Nachweis sicher ein tieferes Verständnis. Für eine Anwendung dieses Bemessungsverfahrens sind jedoch lediglich eine lineare elastische Verzweigungsberechnung und eine materiell nichtlineare Berechnung durchzuführen, welche sich mit leistungsfähigen Programmen in der Praxis leicht ermitteln lassen. Es ist deshalb zu erwarten, dass dieses Bemessungsverfahren zukünftig gängige Praxis wird.

3 Simulationsmethoden und Materialmodelle

3.1 Überblick

Die Modellierung eines Schüttgutes gilt als große Herausforderung in der Numerik. Die Gründe dafür sind zum einen, dass mit einer großen Verformung zu rechnen ist, wenn das Schüttgut in Bewegung gesetzt wird. Dies führt zu Schwierigkeiten in der traditionellen FEM, die auf der lagrangeschen Formulierung basiert. Zum anderen ist die Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens eines Schüttguts sehr komplex, da es sich weder wie eine Flüssigkeit noch wie ein Festkörper verhält. Den Schüttgütern sehr nahe kommen die Materialien der Bodenmechanik. Es wird jedoch ein Fließvorgang in Silos angestrebt, während in der Bodenmechanik ein Gleitvorgang vermieden werden soll. Das Spannungsniveau in einem Silo ist im Vergleich zu geotechnischen Fragestellungen gering. Dennoch ist eine sinnvolle Übernahme der Methodik und Experimentiertechnik von Nutzen ((MARTEN u. a. 1988)).

Aufgrund der sich rasch entwickelnden Hardwareleistung gewinnt die numerische Simulation immer mehr an Bedeutung. Viele Phänomene lassen sich experimentell nur schwer messen, z.B. das räumliche Fließprofil oder der Spannungszustand im Siloinneren während des Entleerens, sodass diese nur numerisch ermittelt werden können. Ein Siloversuch ist nicht nur mit hohen Kosten verbunden, sondern verlangt auch viel Erfahrung. Nach der Validierung an einem Experiment können viele numerische Untersuchungen mit verschiedenen Parametern schnell und günstig studiert werden.

Einen enormen Beitrag zum Verständnis des Silobaus leistete das Institut für Massivbau in Karlsruhe, an welchem das FE-Programm SILO entwickelt wurde. Das Programm wurde von (HÄUSSLER 1984; GLADEN 1985; RUCKENBROD 1995; LEHMANN 1996; NEUMANN 2006) bis zum Jahr 2006 für unterschiedliche Zwecke erweitert. Ein ausführlicher Literaturüberblick zu den genauen Untersuchungen ist in (NEUMANN 2006) zu finden. Aufgrund der rasanten Entwicklung kommerzieller Software wird das Programm jedoch nicht mehr weiterentwickelt. Außerhalb der Siloforschungstätigkeit in Deutschland wurde das Füll- und Fließverhalten im

vergangenen Jahrzehnt von (VIDAL u. a. 2005; GOODEY u. a. 2006; WÓJCIK u. a. 2009; Y. WANG u. a. 2015a), basierend auf der Kontinuumsmechanik untersucht.

3.2 Numerische Methoden

Das Schüttgut setzt sich aus Einzelpartikeln zusammen, die sich entweder durch die Diskrete-Element-Methode (DEM) oder über das Kontinuumsmodell beschreiben lassen. Die Diskrete-Element-Methode basiert auf den newtonschen Bewegungsgesetzen und beschreibt alle Partikel einzeln, die über Kontakt interagieren. Bei dieser Methode werden üblicherweise explizite Lösungsalgorithmen verwendet. Beim Berühren zwischen Partikeln werden Kräfte durch Feder- und Dämpferelemente aktiviert. Die lokalen Kontakte einzelner Partikel mit der Wand führen aufgrund deren Diskontinuität zu großen Spannungsschwankungen (Y. WANG u. a. 2015b), mit denen eine Rückführung zur analytischen Formulierung der Spannungsbeschreibung problematisch wird (Abbildung 3.1).

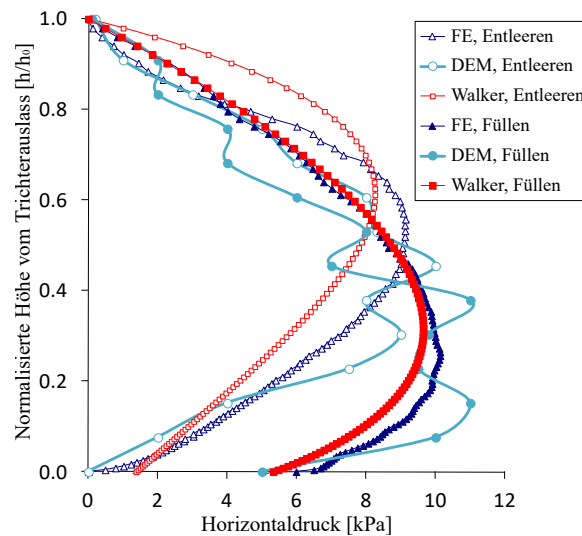


Abb. 3.1: Vergleich der numerisch (FE und DEM) und theoretisch ermittelten Horizontaldrücke (Y. WANG u. a. 2015b)

Zusätzlich ist eine iterative Kalibrierung mit Versuchen für die Bestimmung der Mikroeigenschaften erforderlich. Diese verlangt oft eine wiederholte Anpassung der Mikroeigenschaften. Nicht zuletzt ist der immense Rechenaufwand zu erwähnen. Die Korngröße von Feinschüttgütern liegt im Bereich von Mikrons. Das Schüttgut in realen Silos besteht aus zig Milliarden von Partikeln, sodass eine vollständige Systembetrachtung trotz der zunehmenden Leistungsfähigkeit der Hardware noch nicht möglich ist. Oft werden Partikel aus mehreren zusammengesetzt und als eins betrachtet, jedoch müssen in diesem Fall die Mikroeigenschaften neu angepasst

und definiert werden. Außerdem sind die Partikelformen unterschiedlich und die Verteilung der Partikel unregelmäßig, sodass eine genaue Wiedergabe der Kräfte zwischen Partikeln in einem realen technischen System kaum möglich ist. In Zukunft wird diese Methode immer mehr Anwendung in den Gebieten der Schüttgutindustrie bis hin zur thermischen Verfahrenstechnik finden. Besonders geeignet ist diese Methode für die Untersuchung des mikro-mechanischen Verhaltens in kleinen technischen Systemen.

Die traditionelle Vorgehensweise in der Schüttgutmechanik ist die Betrachtung des Schüttgutes als Kontinuum. Dabei besteht das Schüttgut nicht aus Partikeln und Hohlräumen, sondern aus gleichmäßig verteilten Elementen. Anstatt der Kräfte an den einzelnen Partikeln, werden die Zustandsgrößen an den Elementknoten berechnet. Kontinuumsmechanische Grundgleichungen aus der Festkörper- oder der Strömungsmechanik lassen sich auf das Schüttgut anwenden. Neben den Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen wird zusätzlich ein Stoffmodell zur Beschreibung der Schüttguteigenschaften benötigt, um den kontinuumsmechanischen Gleichungssatz zu vervollständigen. Die Bestimmung der Schüttgutparameter erfolgt, wie es in der Verfahrenstechnik und der Bodenmechanik üblich ist, ebenso auf der kontinuumsmechanischen Betrachtung. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Schüttgut basierend auf der Kontinuumsbeschreibung modelliert.

3.3 Numerische Modellierungstechnik zur Siloentleerung

Das Entleeren eines Silos ist im Vergleich zum Füllprozess, welcher statisch oder dynamisch erfolgen kann, ein dynamischer Vorgang, der nach der klassischen Lagrangeschen Beschreibung erhebliche Schwierigkeiten bei der Modellierung bereitet, da der Entleerungsprozess durch große Elementverzerrungen gekennzeichnet ist. Neben der geometrischen und materiellen Nichtlinearität stellt auch der Kontakt zwischen der Silowand und dem Schüttgut eine hochgradige Nichtlinearität dar. All dies führt zu Konvergenzproblemen in der numerischen Analyse.

ARTONI u. a. 2009 und ARTONI u. a. 2011 haben zur Auslegung eines Silos ein physikalisches Modell mithilfe des Programms ComSol Multiphysics verwendet. Dabei wird das Schüttgutverhalten mit einem hydrodynamischen Modell beschrieben. Das Verhalten wurde durch die Navier-Stokes Gleichung für inkompressibles Material beschrieben. Da die Scherkraft durch eine Viskosität ersetzt wird, müssen die Eingangsparameter für die numerische Simulation am Referenzmodell konfiguriert werden. Außerdem ist das Modell auf ein ebenes System eingeschränkt und kann nur den stationären Zustand simulieren. Entleerungsvorgänge mit einer sich absenkenden Oberfläche sowie Untersuchungen der Nachgiebigkeit der Wand sind nicht mög-

lich, da die Wand nur als Starrkörper simuliert werden kann. ZHENG u. a. 2015 untersuchte die Spannungs- und Geschwindigkeitsverteilung in einem Silo mit der rein eulerschen Formulierung. Das Silo wurde dabei entleert und gleichzeitig befüllt, sodass das Volumen unverändert bleibt.

Als neue Methoden für die Simulation der Entleerungsvorgänge in Silos wurden numerische Methoden wie die Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methode (ALE), die Coupled Eulerian-Lagrange Methode (CEL) und die Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) entwickelt, um große Elementverzerrungen zu vermeiden (Abbildung 3.2). Die SPH-Methode ist eine Lagrange-Methode und gehört wie die DEM zu den Meshfree Methoden (GINGOLD u. a. 1977). Sie wurde zuerst für inkompressible Strömungen sowie astrophysikalische Körper entwickelt. Im Vergleich zur Finite-Element-Methode wird das Kontinuum in Partikel aufgeteilt, denen die Masse, die Geschwindigkeit sowie andere physikalische Feldgrößen zugewiesen werden. Zu den Vorteilen dieser Methoden zählen die einfache Implementierung und die gute Wiedergabe des globalen Verhaltens. Nachteile sind zu einem die Einbuße der Genauigkeit durch die einfache mathematische Implementierung, zum anderen muss die Behandlung der Diskontinuitäten wie Kontakt oder Randwertprobleme verbessert werden. Diese Methode ist aufgrund der Ungenauigkeit für kleine Verformungsprobleme ungeeignet und sollte nur zum Einsatz kommen, wenn die konventionelle Finite-Element-Methode oder die CEL-Methode ihr Limit erreichen oder der Rechenaufwand nicht zu leisten ist (ABAQUS 2014). Dies lässt sich anhand der Untersuchung von (SCHENA 2008) bekräftigen, der den Füllzustand mit der SPH-Methode untersuchte; die Ergebnisse zeigten, dass die Werte der Normalspannung für den Schaft viel höher sind als die nach der Norm. Für den Trichter bildet sich ein völlig anderer Verlauf aus als in der Norm. Eigene Berechnungen mit dieser Methode an einem Silo ergaben, dass diese Methode sich inzwischen deutlich verbessert hat und deren Ergebnisse in der Größenordnung der theoretischen Lösung liegen.

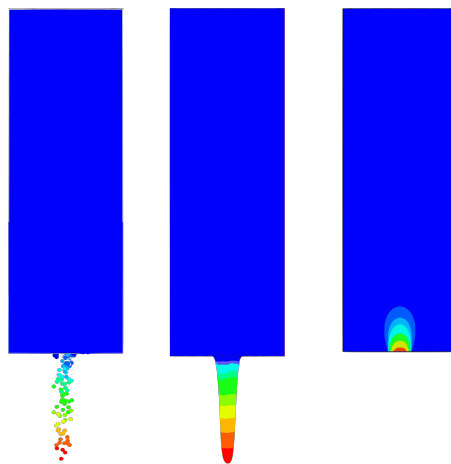


Abb. 3.2: Illustrationen der SPH, CEL und ALE-Methode

Die ALE- und die CEL-Methode haben sich in den letzten Jahren als die geeignetsten Methoden zur Bewältigung großer Verformungen bewährt. DING u. a. 2003; WÓJCIK u. a. 2009 und untersuchten mit der ALE-Methode Spannungsfelder in Silos mit Einbauten sowie die Scherzone beim Entleeren. In der Geotechnik und dem Hochgeschwindigkeitszerspanen findet die ALE-Methode eine breite Anwendung in Eindringvorgängen (AUBRAM 2013). Da die Netztopologie in der ALE-Formulierung unverändert bleibt, können besonders im Kontaktbereich lokale Verzerrungen schlagartig auftreten, wodurch die ALE-Methode an Grenzen stößt. Bei der Drucksondierung (CPT) kann die Netzdeformation ab einer bestimmten Tiefe trotz Remap nicht kompensiert werden (BIENEN u. a. 2015). In diesem Fall kommt die CEL-Methode zum Einsatz, bei der keine Netzveränderung stattfindet. Diese Methode wurde in den letzten Jahrzehnten rasch weiter entwickelt und kommt immer häufiger in den Bereichen der Geotechnik und der Offshore-Anlagen zum Einsatz (QIU 2012; KAYA 2016). Im Rahmen dieser Arbeit werden beide Methoden verwendet. Damit können die Ergebnisse gerechtfertigt werden, gleichzeitig können beide Methoden verglichen werden.

3.4 Gewählte Methoden: Die ALE- und CEL-Methode

Beide Methoden bauen, wie bereits die Namen vermuten lassen, auf der Lagrangeschen und der Eulerschen Betrachtungsweise auf. Grundsätzlich können zwei Bezugssysteme für den Bewegungszustand herangezogen werden. Beide Darstellungen beschreiben die Veränderung der materiellen Bewegung. Sie sind ineinander überführbar, wenn die Bewegungsgleichung eines materiellen Punktes bekannt ist. Bevor die ALE- und CEL-Formulierungen erläutert werden, sollen zunächst die beiden Betrachtungsweisen und deren Vor- und Nachteile kurz vorgestellt werden. Eine ausführliche Darstellung der Kontinuumsmechanik ist z.B. bei (DONÉA u. a. 2003; ALTENBACH 2012) zu finden.

Die kinematischen Betrachtungsweisen beschreiben die Darstellung von Deformationen im Koordinatenraum (Abbildung 3.3). Ein Materialpunkt P des Körpers K hat im Ausgangszustand den Vektor \mathbf{X} , der dessen Position im Raum beschreibt. Die Koordinaten dieses Punktes X_i werden materielle Koordinaten genannt. Wird der Körper in dem Zeitschritt t verformt, so ergibt sich für den Materialpunkt P eine Verschiebung u . Der neue Ort des Punktes P' wird mit dem Vektor \mathbf{x} beschrieben. Diese Koordinaten x_i werden als Ortskoordinaten bezeichnet. Die Geschwindigkeit eines Materialpunktes, betrachtet vom Ausgangszustand, wird mit folgender Gleichung beschrieben:

$$\mathbf{v} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}$$

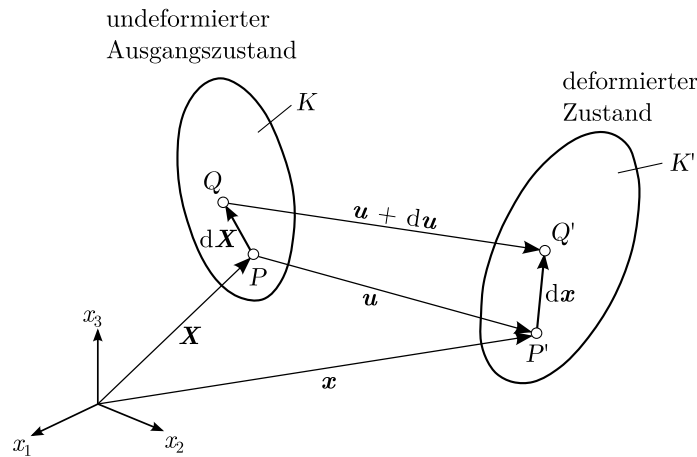


Abb. 3.3: Grundlegende kinematische Zusammenhänge (GROSS u. a. 2014)

Lagrangesche Betrachtungsweise:

Bei der Lagrangeschen Betrachtungsweise werden die Lage \mathbf{x} und die Verschiebung \mathbf{u} als Funktion der materiellen Koordinaten \mathbf{X} durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad (3.1)$$

beschrieben. Somit werden alle dem materiellen Punkt zugeordneten Eigenschaften verfolgt. Das Elementnetz bewegt sich mit dem materiellen Punkt mit. Die Bewegung eines einzelnen materiellen Punkts wird im Raum, in Hinblick auf seine Bewegungsbahn, seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung betrachtet. Der Beobachter befindet sich auf dem bewegten Materialpunkt und erfährt die zeitliche Ortsänderung gegenüber dem Ausgangszustand. Diese Beschreibung wird in der Regel für die Problemstellung der Festkörpermechanik verwendet. Da sie bereits aufgrund der Materialzuweisung zu jedem Element die Bewegung des Kontinuums beschreibt, ergibt sich der Verlauf von Oberflächen automatisch über die Knotenpunkte. Nachteilig ist die Abbildung großer Deformationen, da sich die Netze stark verformen müssen. Bei starker Elementverzerrung kann die Genauigkeit der Lösung beeinträchtigt werden.

Eulersche Betrachtungsweise:

Bei der Eulerschen Betrachtungsweise wird die Verschiebung \mathbf{u} als Funktion der Ortskoordinaten \mathbf{x} durch

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

beschrieben. Anstatt die Bewegung eines Materialpunktes zu verfolgen, werden hier ein Ort und die Änderung der Feldfunktion an diesem raumfesten Ort betrachtet. Deswegen wird die-

se Betrachtungsweise auch als lokale Betrachtungsweise bezeichnet. Der Beobachter befindet sich stets an seiner Ausgangsposition und sieht einen materiellen Punkt an sich vorbeiziehen. Er erfährt die Änderung des zu beobachtenden Bereiches. Anwendung findet diese Betrachtungsweise hauptsächlich in der Fluidmechanik, da das Augenmerk auf die Eigenschaften wie die Geschwindigkeit oder die Dichte in einem fixierten Bereich oder an einem Punkt gerichtet wird. Wird diese Betrachtungsweise angewendet, bleibt das FE-Netz unverändert. Dies bildet eine solide Basis für die Problemstellung mit großer Verformung. Problematisch ist die Abbildung von Oberflächen (DONEA u. a. 2004), da das Kontrollvolumen der Elemente an der freien Oberfläche beim Entleeren nicht mehr konstant bleibt. Es bedarf aufwendiger Zusatzmaßnahmen, um z.B die sich verändernden Grenzflächen bei der Siloentleerung zu beschreiben.

3.4.1 ALE-Methode

Aufgrund der genannten Unzulänglichkeiten wurde die ALE-Methode von HIRT u. a. 1974 entwickelt, um die Vorteile beider Betrachtungsweisen durch eine Kombination beider Formulierungen zu verbinden. Diese Methode findet sowohl in der Festkörpermechanik als auch in der Strömungsmechanik Einsatz. Der Beobachter wird weder an einem Raumpunkt fixiert noch bewegt er sich mit dem Materialpunkt, sondern kann sich beliebig bewegen (siehe Abbildung 3.4). Dadurch ist eine Deformation des Netzes kontrollierbar und die Beschreibung der freien Oberflächen wird vereinfacht.

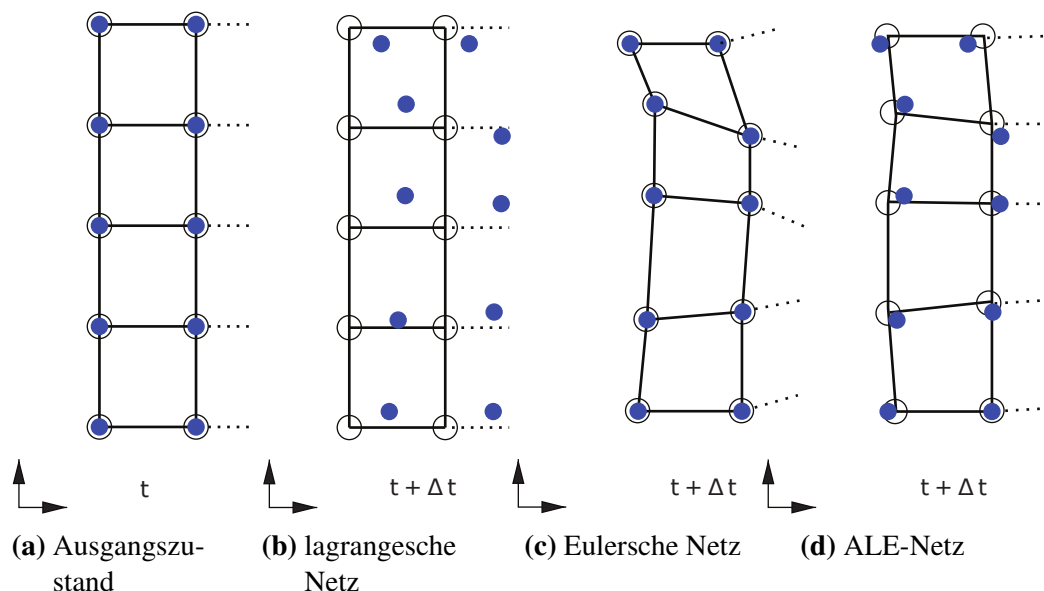


Abb. 3.4: Wirkungsweise der kinematischen Beschreibungen auf die Netzgeometrie nach FUCHS 2014

Da die ALE-Methode sowohl die Netzbewegung als auch die materielle Punktbewegung beschreibt, wird zusätzlich die sogenannte referentielle Koordinate χ im Referenzgebiet R_χ ein-

geführt, welche den Ort des Netzknotens definiert (siehe Abbildung 3.5). Mit R_X wird das Materialgebiet und mit R_x das Raumgebiet gekennzeichnet. Nach der Transformation von den referentiellen zu räumlichen bzw. materiellen Koordinaten sind zwei wichtige Referenzgeschwindigkeiten von Bedeutung:

$$\hat{\mathbf{v}}(\chi, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\chi} \quad \mathbf{w}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (3.3)$$

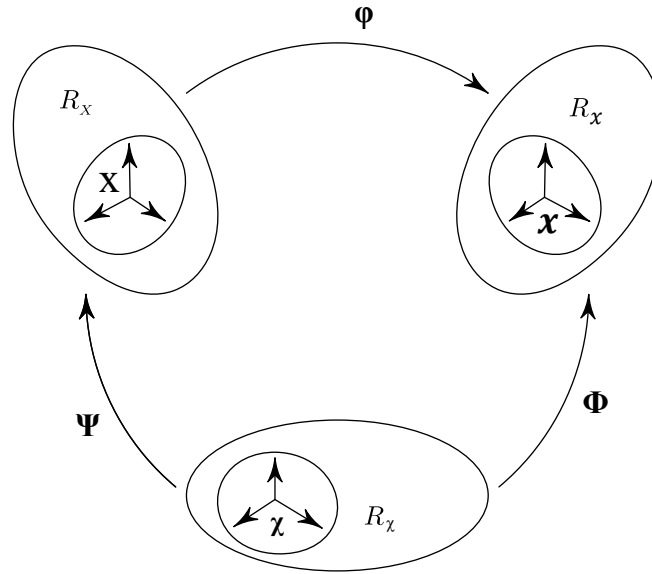


Abb. 3.5: Illustration der ALE-Formulierung (DONÉA u. a. 2003)

Die Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}$ beschreibt die zeitliche Veränderung der räumlichen Koordinaten x bezogen auf die referentielle Koordinate χ . Die Geschwindigkeit \mathbf{w} beschreibt die relative Geschwindigkeit eines Netzpunktes von der materiellen Koordinate aus. Aus diesen beiden Geschwindigkeiten kann die konvektive Geschwindigkeit \mathbf{c} zwischen dem Material und dem Netz berechnet werden:

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} \cdot \mathbf{w} \quad (3.4)$$

Sind die Geschwindigkeiten der Netzpunkte und der Materialpunkte gleich, ergibt sich die konvektive Geschwindigkeit \mathbf{c} zu null. Daraus folgt, dass es sich in diesem Fall um eine rein lagrangesche Betrachtungsweise handelt. Ist die Geschwindigkeit der Gitterpunkte $\hat{\mathbf{v}} = 0$, so sind die konvektive und die Materialgeschwindigkeit gleich: Die ALE-Betrachtungsweise geht in die eulersche über. Es zeigt sich somit, dass die zwei klassischen Betrachtungsweisen ebenfalls mittels der ALE-Methode formuliert werden können. Für die Ableitung der Bilanzgleichungen von Masse, Impuls und Energie für die ALE-Methode sei auf DONEA u. a. 2004 verwiesen.

Der in ABAQUS implementierte ALE-Algorithmus verwendet die sogenannte „uncoupled“ ALE-Methode, welche sich im Vergleich zu dem gekoppelten Ansatz die hohe Effizienz der Implementierung zu Nutze macht. Der Algorithmus beinhaltet über die Verwendung des Split-Operators für jeden Zeitschritt folgende drei Phasen:

- **Lagrangian-Phase:** Diese erste Phase entspricht der updated Lagrangian Methode, bei welcher sich der Beobachter mit der Momentankonfiguration bewegt. Da die Steifigkeitsmatrix den vernachlässigten konvektiven Term in der ungekoppelten ALE-Methode nicht beinhaltet, erfolgt dieser Schritt wie bei der herkömmlichen lagrangeschen Methode (STOKER 1999).
- **adaptive Netzanpassung:** Nach dem lagrangeschen Schritt wird im zweiten Schritt ein neues Netz generiert, um die aufgetretenen Elementverzerrungen zu reduzieren. In (BENSON 1989; GHOSH u. a. 1991) sind verschiedene Remap-Methoden zu finden. In ABAQUS kann das Glätten des Netzes durch drei unterschiedliche Methoden erfolgen (ABAQUS 2014). Die Default-Methode ist das volumetrische Glätten und richtet die Netzknoten so aus, dass diese möglichst den gleichen Abstand zu den angrenzenden Elementmittelpunkten haben. Die zweite Methode ist das lagrangesche Glätten, bei dem sich die Position des Netzknotens schließlich an mit ihm verbundenen Knoten ausrichtet. Aufgrund der Einfachheit eignet sich diese Art nur für mäßige Deformationen. Die letzte Methode ist das hochwertige und rechenintensivste äquipotentielle Glätten, welches den Knoten an allen ihm umgebenden Knoten mittels eines komplexen Algorithmus ausrichtet. Über Gewichtungsfaktoren kann die Art der Glättungsmethode eingestellt werden. Die Netztopologie bleibt beim Glätten unverändert.
- **Eulerschen-Berechnung:** In der dritten Phase werden die Lösungsvariablen auf das neu generierte Netz übertragen. Die in der ersten Phase vernachlässigten konvektiven Terme werden in die Impulsbilanz und Kontinuitätsgleichung mit einbezogen. Um die Zustandsgrößen aus dem vorherigen Netz in das neue Netz zu übertragen, wird programmintern der quadratische Ansatz (Second-Order advection) nach (VAN LEER 1977) aufgrund der Handhabung der Diskontinuität für die Lösungsübertragung voreingestellt.

Für den Entleerungsprozess sind bei einem konventionellen lagrangeschen Netz große Elementverzerrungen unterhalb der Auslauföffnung unvermeidbar. Das Material, welches bereits partikelmäßig aus der Auslauföffnung ausgeflossen ist, spielt jedoch für die Aufgabestellung dieser Arbeit keine Rolle. Der inhärente Vorteil für die Simulation der Entleerungsvorgänge mit Hilfe der ALE-Methode besteht darin, dass man sowohl den Nachfüllprozess (das Silo wird entleert und gleichzeitig nachgefüllt) als auch den Entleerungsprozess (die Oberfläche senkt sich ab) simulieren kann. Freie Ränder bleiben zunächst lagrangesche Ränder, bei denen das

Netz mit dem Material verbunden bleibt, können aber manuell auf eulersche Ränder umgestellt werden, bei denen das Netz fixiert bleibt. Im Auslaufbereich kann durch die Definition eines eulerschen Rands das Verlassen des Schüttgutes aus dem Silo realisiert werden, ohne dass das ausgelaufene Schüttgut im Auslaufbereich hängen bleibt und die Berechnungen nicht konvergieren. Zusätzlich kann eine Netzgeschwindigkeit im Auslaufbereich vorgegeben werden, um eine volumengesteuerte Entleerung zu erreichen, da die Auslaufgeschwindigkeit in der Regel durch die Förderbandgeschwindigkeit geregelt wird.

3.4.2 CEL-Methode

Die gekoppelte Euler-Lagrange Methode (CEL) wurde von NOH 1964 entwickelt. Der in ABAQUS/Explicit implementierte Algorithmus basiert auf der Weiterentwicklung von (BENSON 1992; BENSON u. a. 2004). Dabei handelt es sich um zwei sich überlappende und unabhängige Lagrange- und Euler-Netze. Die beiden Netze werden über spezielle Euler-Lagrange-Kontaktformulierungen zwischen den Lagrangen-Elementen und den Euler-Materialien gekoppelt. Das Lagrange-Netz diskretisiert in der Regel die Struktur, also die Silowand, deren Verformung im Vergleich zum Euler-Material begrenzt bleibt, während das sich stark bewegende Material vom raumfesten Euler Netz eingeschlossen wird.

Für die CEL-Methode wird wie bei der ALE-Methode auch eine Lagrange-plus-Remap Formulierung verwendet (siehe Abbildung 3.6). Analog zu der ALE-Methode erfolgt in jedem Zeitschritt zunächst eine herkömmliche Lagrange Phase (das Material im Euler Netz ist hier noch mit Knoten verbunden) und anschließend der Remap. Die nach dem ersten Schritt verzerrten Elemente werden in ihren ursprünglichen Zustand zurückgesetzt. Im letzten Schritt werden die Zustandsgrößen relevanter Daten auf das Euler Netz übertragen.

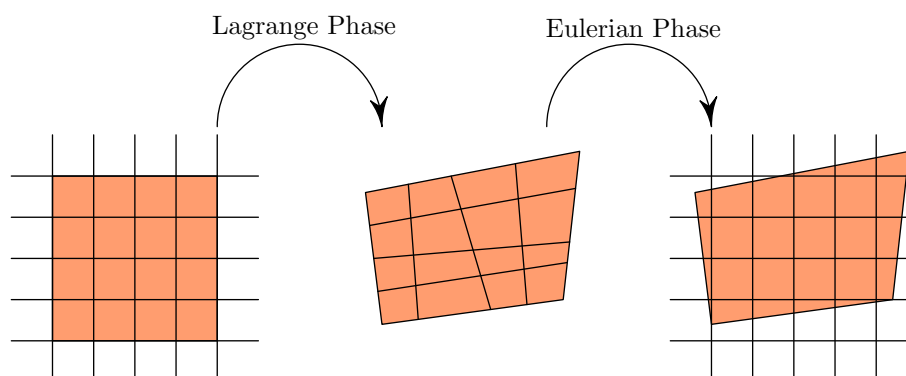


Abb. 3.6: Illustration der CEL-Methode (BENSON u. a. 2004)

Da das Euler-Netz den gesamten Raum abdecken muss, entstehen Elemente ohne Material, die als *void* gekennzeichnet sind. In der Anfangsphase wird das Materialgebiet in das Euler-Netz gefüllt. Mit Hilfe des *volume fraction tool* werden die entsprechenden Materialanteile jedem Element zugewiesen. Wenn das Element voll mit Material befüllt ist, hat es einen Füllgrad von eins (Abbildung 3.7). Ein Element kann gleichzeitig mit unterschiedlichen Materialien besetzt sein. Wenn das Lagrange-Material in den eulerschen Bereich eindringt, wird der Füllgrad kleiner. Dadurch wird sichergestellt, dass der Füllgrad nicht größer wird als eins. Nachteilig ist die numerische Diffusion aufgrund des fixierten Euler Netzes.

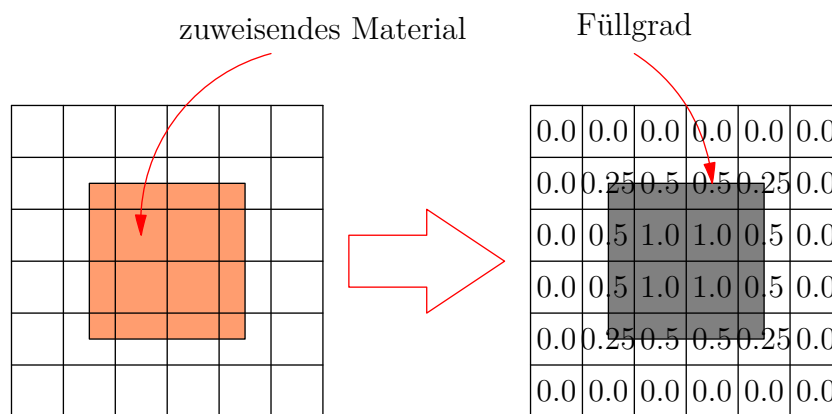


Abb. 3.7: Das *volume fraction tool* (ABAQUS 2014)

Die CEL-Methode dient vor allem der Simulation von Fluid-Struktur-Interaktion. Für den Entleerungsprozess kann dieser Ansatz verwendet werden, da keinerlei Verzerrung stattfindet und somit der komplette Entleerungsprozess simuliert werden kann. Da sich das Material nur innerhalb des Euler Netzes bewegen kann, sind zur Abbildung der Oberfläche Elemente mit Luft erforderlich, um die Materialbewegung weiterhin verfolgen zu können. Im Gegensatz zu der ALE-Methode können unterhalb der Auslauföffnung Elemente ohne anfängliche Materialfüllung angeordnet werden, in die das Schüttgut einfließen kann. Bei einem ausreichenden Euler-Netz kann sich aus dem ausfließenden Schüttgut ein Schüttgutkegel bilden, wenn innerhalb des Euler-Netzes eine zusätzliche Platte unterhalb der Auslauföffnung zum Auffangen des Schüttgutes vorhanden ist.

3.5 Lösungsmethoden: das implizite und explizite Verfahren

Die Lösung des Gleichungssystems in der nichtlinearen Dynamik erfordert die Benutzung inkrementeller oder iterativer Lösungsverfahren und kann entweder implizit oder explizit erfolgen. Die Wahl der Zeitintegration hängt stark von den zu lösenden Problemen ab.

Implizite Verfahren erfordern für den Zeitschritt $n + 1$ nicht nur Größen aus dem vorangegangenen Schritt n sondern auch Größen, die für einen weiteren Zeitschritt gelten, aber noch unbekannt sind, sodass sie nur iterativ ermittelt werden können. Das Kräftegleichgewicht wird in jedem Zeitschritt berücksichtigt und kontrolliert. Da in jedem Zeitschritt die Steifigkeitsmatrix neu gebildet und invertiert werden muss, ist das Verfahren sehr aufwendig; gerade bei hochgradig nichtlinearen Vorgängen sind oft viele Iterationen erforderlich, bis die Berechnung konvergiert. Dies erhöht wiederum den Rechenaufwand.

Zur Abbildung großer Verformungen kommen fast ausschließlich explizite Verfahren zum Einsatz. Alle obengenannten in ABAQUS implementierten Methoden verwenden das explizite Zeitschrittverfahren, bei dem die Lösung für den Zeitschritt $n + 1$ nur von den Größen aus dem Zeitschritt n abhängt. Die Zeitintegration erfolgt vorwärts, weshalb das Verfahren als das Euler-Vorwärts-Verfahren oder das zentrale Differenzenverfahren bezeichnet wird. Im Gegensatz zu den impliziten Verfahren muss die globale Steifigkeitsmatrix nicht für jeden Zeitschritt neu aufgestellt und invertiert werden. Die Verfahren zeichnen sich durch eine einfache Implementierung und geringe Rechenzeiten aus. In dieser Arbeit wird im Wesentlichen auf die explizite Zeitintegration zurückgegriffen.

ABAQUS verwendet das explizite zentrale Differenzenverfahren (ABAQUS 2014; NASDALLA 2015). Wenn Verschiebungen \mathbf{u}_n , Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}$ zum Zeitpunkt t_n sowie $\mathbf{u}_{n-1/2}$ zum Zeitpunkt $t = t_{n-1/2}$ gegeben sind, ergeben sich die Geschwindigkeiten und die Verschiebungen mittels der expliziten Mittelpunktsregel:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_{n-1/2} + \frac{\Delta t_{n+1} + \Delta t_n}{2} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} \quad (3.6)$$

Die inneren Kräfte \mathbf{I}_{n+1} und äußeren Kräfte \mathbf{P}_{n+1} berechnen sich aus:

$$\mathbf{I}_{n+1} = \mathbf{I}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1/2}) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1/2}) \quad (3.8)$$

Schließlich erfolgt die Berechnung der Beschleunigungen:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{I}_{n+1}) \quad (3.9)$$

Durch die Benutzung einer Diagonalmatrix \mathbf{M} (lumped mass matrix) vereinfacht sich die Berechnung des Beschleunigungsanteils enorm, da dadurch Inversion und Multiplikation mit dem inneren Lastvektor \mathbf{I} und dem äußeren Lastvektor \mathbf{P} kaum Rechenaufwand benötigen. Nachteilig ist die bedingte Stabilität der Approximation, da kein Gleichgewicht erfasst wird. Zur Gewährleistung einer stabilen Approximation muss ein kritisches Zeitinkrement Δt_{krit} eingehalten werden, damit die numerische Approximation nicht zu stark von dem exakten nichtlinearen Verlauf abweicht. Das größtmögliche optimale Zeitinkrement Δt_{krit} lässt sich aus der Eigenfrequenz ω_{max} und der lehrschen Dämpfung ξ_{max} des Systems wie folgt beschreiben:

$$\Delta t_{krit} \leq \frac{2}{\omega_{max}} (\sqrt{1 + \xi_{max}^2} - \xi_{max}) \quad (3.10)$$

Die elementweise Abschätzung des stabilen Zeitinkrements wird durch die charakteristische Elementlänge L_e und die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c_d bestimmt, welche wiederum aus den ingenieurmäßigen Elastizitätsparametern E und ν , sowie der Dichte des Elements ρ bestimmt wird. Für ein isotropes, lineares Material wird das kritische Zeitinkrement Δt_{krit} für ein Volumenelement berechnet:

$$\Delta t_{krit} = \frac{L_e}{c_d} \quad \text{mit} \quad c_d = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} \quad (3.11)$$

Da der kritische Zeitschritt von der Steifigkeit abhängt, wird in der Regel die Siloschale bei der Simulation der Entleerungsvorgänge als unverformbarer Starrkörper simuliert, um das kritische Zeitinkrement zu erhöhen bzw. den Rechenaufwand zu reduzieren. Im plastischen Bereich ändern sich sowohl die Steifigkeiten als auch die Elementabmessungen. Deshalb wird das kritische Zeitinkrement in jedem Zeitschritt in Abhängigkeit von den aktuellen Elementlängen und tangentialen Steifigkeiten aktualisiert. Bei unvermeidlichen kleinen Zeitinkrementen, bedingt durch feinere Netze oder eine große Steifigkeit, kann das kritische Zeitinkrement durch die Massenskalierung verringert werden. Dies gelingt über die Veränderung der Dichte. Dadurch wird die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit und somit der Rechenaufwand reduziert. Durch eine Anhebung der Dichte könnten jedoch kinematische Effekte verfälscht werden, da der Anteil aus dem Produkt der Massenmatrix \mathbf{M} und $\ddot{\mathbf{v}}$ in der Bewegungsgleichung erhöht wird. Als Bewertungskriterium für die Lösungsqualität sollte die Energiebilanz herangezogen werden.

Ein wichtiger Aspekt zur Simulationstechnik mit Hilfe der ALE- und CEL-Methode in ABAQUS ist die Verwendung der linearen Volumenelemente mit reduzierter Integration. Solche Elemente

benutzen nur einen Integrationspunkt und benötigen viel weniger Rechenzeit. Dies kann jedoch zu dem sogenannten Null-Energie-Moden (Hourglassing) führen, bei dem die Dehnung am Integrationspunkt null ist, obwohl das Element verzerrt ist. Bei einem vierknotigen Rechteckelement führt dies zu einer Verformungsfigur, bei der die Elementkanten eine Stundenglas-Form bilden. Um dies zu verhindern, sind verschiedene Hourglassing-Kontrollen durch die Addition von künstlichen Steifigkeitstermen vorhanden. Dies erfordert die Kontrolle der durch die zusätzlichen Steifigkeitsterme erzeugten künstlichen Dehnungsenergien. Der Anteil soll bezogen auf die innere Arbeit unterhalb von 1% liegen (ABAQUS 2014). In der Regel lässt sich dieser Effekt durch eine feinere Vernetzung verringern.

3.6 Kontakt

Ein essentieller Bestandteil in der Simulation des Silos ist die Abbildung der Interaktion zwischen der Silowand und dem Schüttgut. Sie erfolgt entweder durch eine Kontaktformulierung oder über sogenannte Interface-Elemente. Die Wandlasten ergeben sich aus der Kontaktfläche und müssen besonders genau erfasst werden. Eine Besonderheit dabei ist, dass sich das Schüttgut in der Entleerungsphase nach unten bewegt, während sich die Wand nicht (als Starrkörper) oder nur geringfügig (als verformbarer Körper) verformt. Aufgrund der großen Relativverschiebung muss für jeden Punkt in jedem Zeitinkrement nach möglichen Kontaktpunkten gesucht werden. Dieser Prozess ist somit in einem hohen Maße geometrisch nichtlinear. Im Folgenden werden kurz die verwendeten Algorithmen zur Kontaktmodellierung vorgestellt.

3.6.1 Reibungsmodell

Das Verformungsverhalten eines Körpers unter Belastung wird mit der Definition des Stoffgesetzes beschrieben. Treffen zwei oder mehrere solcher Körper aufeinander, müssen zusätzlich dabei entstehende Interaktionen beschrieben werden. Die Größe der Reibkräfte wird vom Reibungsmodell bestimmt, welches von den Oberflächeneigenschaften abhängt. Das einfachste und meist verwendete Modell ist das Coulomb-Reibungsmodell. Die tangentielle Kraft oder auch die Reibkraft ergibt sich im Allgemeinen aus der auf die Kontaktfläche wirkenden Normalkraft, multipliziert mit einem dimensionslosen Reibungskoeffizienten:

$$F_T = \mu(\dot{\gamma}_q, p, \bar{\Theta}) \cdot F_N \quad (3.12)$$

Der Reibungskoeffizient μ ist dabei abhängig von mehreren Faktoren: der Gleitgeschwindigkeit, dem Druck p auf die Kontaktfläche und der Temperatur $\bar{\Theta}$. Überschreitet die tangentielle

Kraft die Haftreibungskraft $\mu_s F_N$, bewegen sich die Kontaktflächen relativ zueinander und der Reibungskoeffizient verringert sich auf dessen kinematischen Wert μ_k . Der Verlauf des Reibungskoeffizienten über die Gleitgeschwindigkeit kann mit einer exponentiellen Funktion ausgedrückt werden (ABAQUS 2014):

$$\mu = \mu_k + (\mu_s - \mu_k) \cdot e^{-d_c \cdot \dot{\gamma}_{eq}} \quad (3.13)$$

Der statische Reibungskoeffizient μ_s , der kinematische Reibungskoeffizient μ_k und der exponentielle Abfallfaktor d_c sind mechanische Eigenschaften der Kontaktflächen. Die Gleitgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_{eq}$ berechnet sich über die möglichen Bewegungsrichtungen. Die Abhängigkeiten des Reibungskoeffizienten von der Normalspannung p und der Temperatur $\bar{\Theta}$ können nur durch reine Versuchsdaten beschrieben werden. In der Regel ist der Einfluss aus der Temperatur im Kontaktbereich des Silos zu vernachlässigen. Experimente von STADLER 1986 zeigten, dass der Reibungskoeffizient nahezu unabhängig von der wirkenden Normalspannung ist. Y. WANG u. a. 2014 untersuchten die Wandnormalspannung des Silos mit dem Reibungskoeffizient μ unter angenommenen Parametern für die Gleichung 3.13. Dabei handelte es sich um einen großen Reibungskoeffizienten von 0,65. Wie zu erwarten, nimmt die Normalspannung bei klein werdendem Reibungskoeffizienten leicht zu. Jedoch wird zum einem das Silo üblicherweise langsam entleert und zum anderem ist die Differenz von beiden Reibungskoeffizienten μ_s und μ_k klein, so dass die Werte μ und μ_s sich nicht wesentlich unterscheiden. Numerische Untersuchungen von (ROMBACH 1991) zeigten, dass das lineare Coulomb-Reibungsgesetz mit einem konstanten Reibungskoeffizienten ausreichend genaue Ergebnisse lieferte, welches sowohl den Normansätzen zur Berechnung der Silodrücker als auch den meisten numerischen Untersuchungen zugrunde liegt. Außerdem reduziert sich der Rechenaufwand im Vergleich zu den nichtlinearen Formulierungen erheblich. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur das lineare Coulomb-Reibungsgesetz verwendet.

3.6.2 Penalty-Methode

In ABAQUS stehen bei der expliziten Zeitintegration zwei Kontaktalgorithmen zur Modellierung des Kontaktes zur Verfügung: der allgemeine Kontakt (General Contact) und die Definition von Kontaktpaaren (Contact pairs). Beim generellen Kontakt werden alle Flächen ohne spezielle Definition der Kontaktflächen ausgewählt, während beim Kontaktpaar die Kontaktflächen explizit definiert werden müssen. In einer adaptiven ALE-Vernetzung wird die Modellierung auf die Definition eines Kontaktpaars eingeschränkt, sobald eine Fläche als eulersche Randbedingung definiert ist. Deshalb erfolgt die Modellierung der Kontakte mit der ALE-Methode auf der Definition des Kontaktpaars. Im Gegensatz zur ALE-Methode unterstützt die CEL-Methode

nur den allgemeinen Kontakt. Zur Berechnung der Kontaktkraft und Erfüllung der Ungleichung sind Kontaktformulierungen wie das Penalty-Verfahren oder die Methode der kinematischen Verträglichkeit bei expliziter Zeitintegration implementiert. Die zweite Methode erfüllt die Kontaktnebenbedingungen exakt und ist entsprechend mit einem hohen Rechenaufwand verbunden, während beim Penalty-Verfahren die Kontaktnebenbedingungen nur näherungsweise erfüllt sind. Für die meisten Fälle sollten die beiden Methoden nahezu gleiche Ergebnisse liefern. Der Kontaktalgorithmus in der CEL-Methode und der in der ALE-Methode verwendete Kontaktalgorithmus basieren auf dem Penalty-Verfahren.

Das Penalty-Verfahren erfreut sich in der expliziten Zeitintegration besonders großer Beliebtheit. Im Vergleich zu anderen Methoden, wie der Methode der kinematischen Verträglichkeit oder der Methode der langrangeschen Multiplikatoren entstehen keine zusätzlichen Freiheitsgrade, weshalb der Gleichungslöser nicht neu modifiziert wird. Das Verfahren hat sich aufgrund der einfachen Implementierung aus der numerisch-mathematischen Sicht bei dem expliziten Verfahren in der Dynamik etabliert. Besonders wenn Starrkörper involviert sind, ist das Penalty-Verfahren vorzuziehen. Beim Penalty-Verfahren ist es grundsätzlich so, dass das statische Gleichgewicht beim Minimum der potenziellen Energie erreicht ist (RUST 2011). Dabei wird eine gewisse Eindringung von Slave-Punkten in Master-Punkten zugelassen. Beim Eindringen für den Kontaktpunkt wird eine Feder eingeführt (Abbildung 3.8). Die Berechnungsformel der potenziellen Energie W_p wird durch einen Straftermin (Penalty) ergänzt, der die Energie erhöht. Die Gleichung nach Erfüllen der Kontaktbedingung $g = 0$ kann wie folgt ausgedrückt werden:

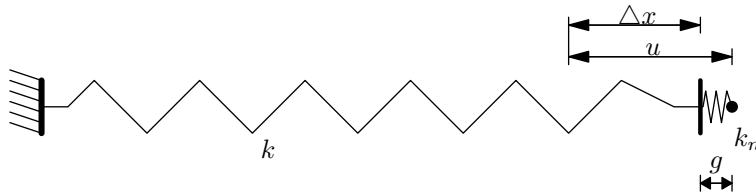


Abb. 3.8: Penalty-Steifigkeit (RUST 2011)

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u - u \cdot F + \frac{1}{2} \cdot k_n \cdot (g(u))^2 \quad (3.14)$$

Das Minimum der Gleichung ist bei

$$u = \frac{F + k_n \cdot \Delta x}{k + k_n} \quad (3.15)$$

erreicht. Die Verschiebung ist somit von der Penalty-Steifigkeit abhängig. Erst wenn diese nahezu unendlich ist, wird die Zwangsbedingung des Kontakts $u = \Delta x$ kinematisch exakt erfüllt.

Dies kann jedoch numerisch nicht abgebildet werden. Stattdessen wird ein endlicher Wert angenommen, wodurch sich eine Eindringung ergibt. In der Regel ist die Eindringung nur minimal, sodass die Ergebnisse nicht verfälscht werden. Dies lässt sich zusätzlich durch die Ausgabe der Durchdringungsgröße und der externen Arbeit E_{pw} kontrollieren. In seltenen Fällen ist bei einer großen Eindringung eine sehr hohe Penalty-Steifigkeit erforderlich; es ist darauf zu achten, dass das stabile Zeitinkrement dadurch merkbar kleiner wird und sich der Rechenaufwand somit erhöht. ABAQUS versucht das günstige Mittel zwischen zu niedriger und zu hoher Steifigkeit zu finden. Letztendlich ergibt sich die Kontaktkraft beim Eindringen aus g multipliziert mit der Penalty-Steifigkeit k_n . Genaue mathematische Beschreibungen zum Penalty-Verfahren findet man in WRIGGERS 2001 und RUST 2011.

3.6.3 Kontaktmodellierung mit ALE und CEL

Unter Anwendung der ALE-Technik wird die Interaktion durch Kontaktpaare definiert. Die Kontaktdiskretisierung beruht auf dem Master-Slave-Konzept (Knoten-zu-Oberflächen). Grundsätzlich sollte die steifere Silowand als Masterfläche und die Berandung vom Schüttgut als Slavefläche definiert werden. Die Masterfläche (Silowand) sollte gröber vernetzt werden, damit es bei den Knoten nicht zu einem übermäßigen Eindringen kommt. Bei dem in ABAQUS/EXPLICIT implementierten Suchalgorithmus wird die Kontaktsuche zweimal durchgeführt und jede Kontaktfläche sowohl als Master- als auch als Slavefläche untersucht. Dadurch wird die Eindringung von einzelnen Knoten minimiert.

Die CEL-Technik benutzt den allgemeinen Kontakt mit dem Penalty-Verfahren. Mittels dieses Kontaktalgorithmus wird die Interaktion im Silo zwischen dem Lagrange-Körper (Silowand) und dem Euler-Material (Schüttgut) realisiert. Dabei werden Knoten auf der Oberfläche der Lagrangeschen Struktur und Ankerpunkte in den eulerschen Materialien erzeugt. Wenn sich beide Körper durchdringen (siehe Abbildung 3.9), wird ein Kontakt zwischen dem Knoten und dem Anker durch eine Feder erzwungen, über deren Steifigkeit zusammen mit der Größe der Eindringung die Kontaktkraft berechnet wird. Um das Eindringen gering zu halten und den Effekt einer Leckbildung zu vermeiden, ist eine feine Diskretisierung des Euler-Netzes erforderlich.

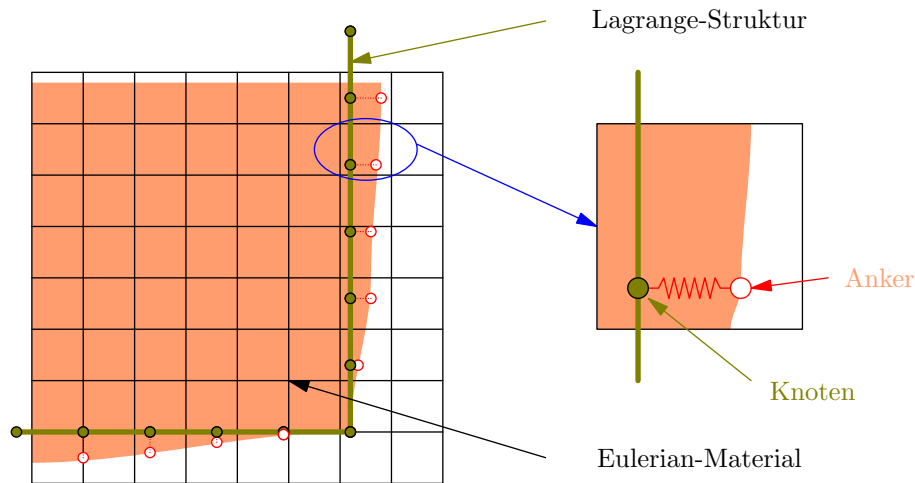


Abb. 3.9: Schematische Darstellung des Kontaktmodells der CEL-Technik

3.7 Materialmodelle für granulare Medien

Einer der wesentlichen Aspekte für die Simulation der Fließvorgänge in Silos ist neben der Simulationstechnik die Wahl eines geeigneten Stoffgesetzes, welches das Verhalten des Schüttgutes möglichst genau durch mathematische Formulierungen approximiert. Wie bereits erwähnt, basieren alle hier verwendeten numerischen Methoden auf der Kontinuumsmechanik, d.h. das Schüttgut wird nicht als Anhäufung vieler Partikeln, sondern als Kontinuum beschrieben, dessen Eigenschaften kontinuierlich verschmiert angenommen werden. Da das Schüttgut dem Boden ähnelt, werden Stoffgesetze aus der Geotechnik herangezogen. Trotz immenser verfügbaren Stoffgesetzen bleibt die Entwicklung von neuen Stoffgesetzen immer noch Gegenstand der Forschung. Die Vielfalt zeigt wiederum, dass Stoffgesetze nur eine mathematische Abstraktion der Wirklichkeit darstellen und auf zusätzlichen Annahmen beruhen. Deshalb wird nicht selten ein Material durch unterschiedliche Stoffgesetze repräsentiert. Aufgrund des äußerst komplexen Materialverhaltens liegt noch kein allgemeingültiges Stoffgesetz vor. Es muss also je nach Problemstellung ein geeignetes Stoffgesetz gewählt werden. Außerdem muss bei der Auswahl des Stoffgesetzes beachtet werden, dass die Stoffparameter leicht durch die Versuchseinrichtungen und Algorithmen zu bestimmen sind. Einen Überblick über mögliche Stoffgesetze geben W. F. CHEN u. a. 1990 und KOLYMBAS u. a. 2017. In dieser Arbeit wird nur auf die zwei am häufigsten verwendeten Stoffgesetze in der Siloforschung eingegangen.

3.7.1 Elasto-plastisches Stoffgesetz nach Drucker-Prager

Ein wesentliches Charakteristikum von Schüttgütern ist die fehlende Kohäsion und damit die fehlende Zugfestigkeit. In den meisten kommerziellen Softwares existieren verschiedene Materialmodelle, meistens elasto-plastische Stoffgesetze, zur Beschreibung des kohäsionslosen Schüttgutes. Dabei wird die gesamte Deformationsrate in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt. Das Standardmodell in der Geotechnik ist das Mohr-Coulombsche Stoffgesetz. Es beruht auf einem linearen Ansatz und beschreibt das Schüttgut mit den der Norm zugrunde liegenden Parametern, dem inneren Reibungswinkel und der Kohäsion. Für die Spannungsberechnung im Silo wurde das elasto-plastische Stoffgesetz nach Drucker-Prager aufgrund der sehr guten Wiedergabe der Versuchsergebnisse sowie der gut abschätzbaren und überschaubaren Parameter in der Praxis und Forschung bevorzugt (GALLEGO u. a. 2015a; Y. WANG u. a. 2015a).

Im Rahmen dieser Arbeit wird das in ABAQUS implementierte extended Drucker-Prager Modell mit einem linearen Ansatz verwendet. Mit dem linearen Ansatz kann das unterschiedliche Extensions- und Kompressionsverhalten von granularen Medien berücksichtigt werden. Während das Mohr-Coulomb Gesetz in der Deviatorebene des Hauptspannungsraumes durch eine Pyramide dargestellt ist, kann das Drucker-Prager Modell die Fließfläche im Deviatorraum durch den Fließflächenfaktor K beschreiben, der durch Quotienten der Deviatorspannung des triaxialen Kompressionsversuchs und des triaxialen Extensionsversuchs bestimmt wird. Der Wert liegt im Bereich von $0,778 \leq K \leq 1,0$. Für den Fall $K = 1$ hat das Fließkriterium die Form eines Kreises (Abbildung 3.10). Durch diese Parameter bietet das extended Drucker-Prager Modell die Möglichkeit der Anpassung der Fließbedingung.

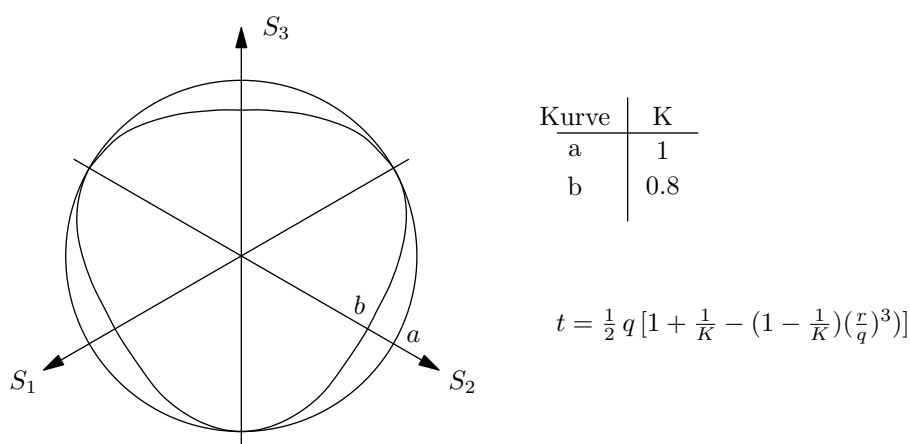


Abb. 3.10: Darstellung der Fließfläche im Deviatorraum durch den Fließflächenfaktor K und Definition der Spannungsgröße t (ABAQUS 2014)

3 Simulationsmethoden und Materialmodelle

Für das isotrope Stoffverhalten sind zunächst drei invariante Größen einzuführen:
Spannungsdeviator und hydrostatischer Druck

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} + p\mathbf{I} \quad p = -\frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{T}) \quad (3.16)$$

Von Mises Vergleichsspannung

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S} : \mathbf{S})} \quad (3.17)$$

Dritte Invariante der deviatorischen Spannungen

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{9}{2}\mathbf{S}^2 : \mathbf{S}\right)} \quad (3.18)$$

Das Fließkriterium lautet:

$$F = t - p \tan \phi_{i,DP} - d \quad (3.19)$$

mit

$$t = \frac{1}{2}q\left[1 + \frac{1}{K} - \left(1 - \frac{1}{K}\left(\frac{r}{q}\right)^3\right)\right] \quad (3.20)$$

Für granulare Medien liegt meist eine nichtassoziierte Fließregel vor, d.h. der Vektor des plastischen Dehnungsinkrements steht nicht senkrecht zur Fläche des plastischen Potentials. In der Regel vergrößert sich das Volumen von einem dicht gelagerten Schüttgut unter Scherbeanspruchung. Eine assoziierte Fließregel würde bedeuten, dass der Reibungswinkel β genauso groß ist wie der Dilatanzwinkel. Die plastische Verzerrungsrichtung kann im Falle einer nichtassoziierten Fließregel durch das plastische Potenzial festgelegt werden:

$$G = t - p \tan \psi \quad (3.21)$$

Damit lässt sich das Verformungsverhalten mit folgenden sechs Materialparametern darstellen: Elastizitätsmodul E , Poissonzahl ν , Innerer Reibungswinkel $\phi_{i,DP}$, Fließflächenparameter K , Dilatanzwinkel ψ und Kohäsion d . Die fehlende Kohäsion hat dabei einen großen Einfluss auf die numerische Stabilität. Für das erforderliche Verfestigungsgesetz kann das Konvergenzverhalten durch einen sehr kleinen Kohäsionswert verbessert werden.

3.7.2 Hypoplastisches Stoffmodell

Eine Alternative zur Plastizitätstheorie bietet das hypoplastische Stoffgesetz. In diesem Abschnitt soll die Entwicklung des verwendeten Stoffmodells in groben Zügen aufgezeigt werden. Details zu mathematischen Herleitungen sind in den genannten Literaturquellen zu finden. Die erste Version des hypoplastischen Stoffgesetzes nach (KOLYMBAS 1985; KOLYMBAS 1988) enthielt bereits die wesentliche Eigenschaft der inkrementellen Nichtlinearität, die es ermöglicht, unterschiedliche Steifigkeiten für Be- und Entlastung in einer geschlossenen Gleichung zu berücksichtigen. Die Version enthielt jedoch noch einige Schwachstellen: Zum einen musste eine Stoffkonstante für die Anfangstangentensteigung E_0 aus dem Triaxialversuch korrigiert werden und zum anderen waren alle vier Stoffkonstanten nur für einen bestimmten Bereich gültig, da sie druckabhängig waren (WEIDNER 1990). Außerdem war die Steifigkeitsänderung bei zyklischer Belastung mit zunehmendem Verdichtungsgrad geringer. Infolgedessen erweiterten (WU 1992) und (BAUER 1992) das Grundmodell durch Einführung einer zusätzlichen Zustandsvariable, der Porenzahl e , und einer Geschichts- und Übergangsfunktion. Somit wurde das Abbilden einer Hysterese möglich.

Das in dieser Arbeit verwendete Basismodell wurde von (WOLFFERSDORFF 1996) weiterentwickelt. Dabei wurden wichtige Bodeneigenschaften, wie die Barotropie und die Pyknotropie berücksichtigt. Das Basismodell kann zwar Verformungen gut abbilden, hat jedoch ein Problem mit der fortschreitenden Deformation bei Belastungszyklen. Da die Deformationsgeschichte auf die Ausgangsspannung reduziert ist, folgt bei Wiederbelastung die gleiche Steifigkeit wie bei Erstbelastung. Die Verformungen akkumulieren sich bei zyklischer Belastung schnell (das sogenannte „ratcheting“), dass das Modell nur für eine einmalige Be- und Entlastung geeignet ist. Das Problem zu beheben gelang NIEMUNIS u. a. 1997 durch die Einführung einer zusätzlichen Zustandsvariable, der integranularen Dehnung. Das verwendete hypoplastische Stoffmodell enthält somit acht Kennwerte sowie fünf weitere für das integranulare Dehnungskonzept. Detaillierte Beschreibung der einzelnen Werte sowie deren Bestimmungsverfahren sind in BÖHRNSEN 2002 zu finden. Im Folgenden werden die Parameter kurz erläutert:

- Der kritische Reibungswinkel ϕ_c ist der Reibungswinkel nach einer großen Scherverformung (im Bruchzustand). Dabei hat die Kornform besonders großen Einfluss auf den Wert.
- Die Granulathärte h_s und der Exponent n beschreiben das Kompressionsverhalten.
- Die Porenzahl e_{c0} beschreibt die Porenzahl im kritischen Zustand beim Korndruck Null.
- Die Porenzahl e_{d0} ist die Porenzahl bei dichtester Lagerung infolge zyklischer Scherung.
- Die Porenzahl e_{i0} ist die größtmögliche Porenzahl eines einfachen Korngerüsts bei lockester isotroper Lagerung.

3 Simulationsmethoden und Materialmodelle

- Der Exponent α beschreibt den Einfluss der Dichte auf den Peakreibungswinkel des Korngerüsts.
- Der Exponent β steuert die Spannungsrate durch den Spannungsmultiplikator, welcher die Steifigkeit in Abhängigkeit von der Dichte berücksichtigt.
- Die Faktoren m_T und m_R kontrollieren die Erhöhung der Steifigkeit bei Änderung des Dehnungspfades um 90° und 180° im Bereich kleiner Dehnungen.
- Der Parameter R entspricht der maximalen intergranularen Dehnung, unterhalb der die Steifigkeit im Falle einer Dehnungsumkehr nahezu konstant bleibt.
- Die Parameter β_r und χ steuern die Kontur der Steifigkeitsabnahme im Bereich R .

Damit ist das hypoplastische Stoffgesetz in der Lage, wichtige Eigenschaften von granularen Medien zu beschreiben. Dazu zählen vor allem die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung, das Dilatanz- und Kontraktanzverhalten, die Dichte- und Druckabhängigkeit, die Entfestigung, die Anelastizität sowie das zyklische Verhalten. Die Bestimmung und eine detaillierte Beschreibung der acht Kennwerte für das Grundmodell ist in HERLE 1997 ausführlich beschrieben. Sie können leicht mit Standardversuchen der Bodenmechanik bestimmt werden. Für die weiteren fünf Parameter sind aufwendige zyklische Versuche erforderlich. Die Bestimmung der Parameter erfolgt durch eine Anpassung simulierter Elementtests an Versuchsergebnissen. In der Literatur sind sehr wenig kalibrierte Parameter vorhanden. Oft handelt es sich lediglich um Erfahrungswerte.

Darüber hinaus gibt es zahlreiche Erweiterungen, die verschiedene Phänomene berücksichtigen. Als Beispiel sei die geschwindigkeitsabhängige Erweiterung mit viskosen Termen zu nennen (BÖHRNSEN 2002), mit der das schnelle Fließen von Schüttgütern abgebildet werden kann. Ein generelles Problem bei der Beschreibung des fluidähnlichen Verhaltens für granulare Medien liegt in den anzunehmenden Parametern, die für die mathematische Formulierung getroffen werden müssen. Es liegen noch keine Bestimmungsversuche für die dynamischen Parameter vor. Die Parameter für die viskosen Terme werden häufig iterativ aus den numerischen Ergebnissen an Versuchsergebnisse angepasst (ARTONI u. a. 2011). In der Regel wird ein Silo volumengesteuert mit kleiner Geschwindigkeit entleert, sodass der geschwindigkeitsabhängige Anteil nur einen geringen Einfluss auf die bemessungsrelevanten Wanddrücke hat.

4 Numerische Simulation

Im folgenden wird auf die numerische Umsetzung eingegangen. In diesem Kapitel werden die für die weiteren Parameterstudien verwendete Simulationsmethode und das Materialmodell festgelegt. Zunächst wird über mögliche Füllmethoden diskutiert und anschließend die im Kapitel 3 vorgestellten Methoden miteinander verglichen. Vergleichsberechnungen zur Untersuchung des Einflusses von unterschiedlichen Stoffgesetzen werden durchgeführt. Zudem wird die Interaktion zwischen dem Schüttgut und der Silowand untersucht.

4.1 Simulation des Fülldrucks

Für den Entleerungsvorgang muss zuerst der Füllzustand erreicht werden. Die Füllmethoden haben einen Einfluss auf die Entleerungsberechnung. In der Praxis werden Silos in der Regel von oben gefüllt. Das Fallen von einzelnen Partikeln kann nur mithilfe der DEM simuliert werden. Es wird davon ausgegangen, dass das Befüllen keinen kritischen Lastzustand darstellt. In dieser Arbeit wird nur der Endzustand des Füllvorgangs berücksichtigt. Es gibt zwei wesentliche Methoden, den Füllzustand zu simulieren (Abbildung 4.1).

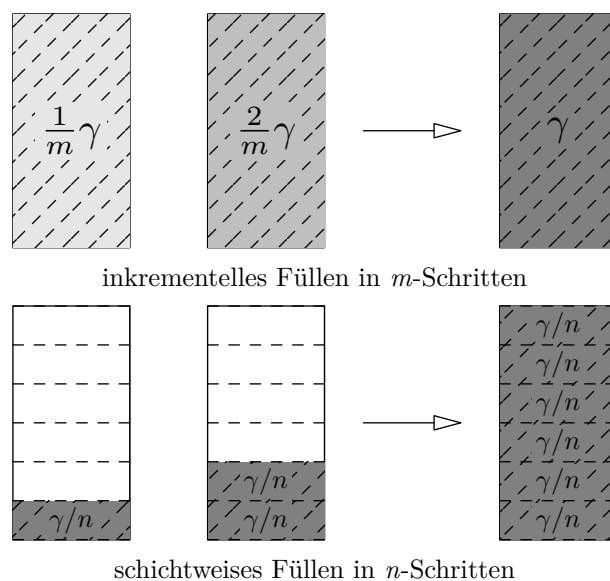


Abb. 4.1: Füllmethoden: inkrementelles Füllen und schichtenweises Füllen

4 Numerische Simulation

- Das inkrementelle Füllen: Das Eigengewicht wird über das gesamte Schüttgut in m -Inkrementen aufgebracht. Dabei erhöht sich in jedem Lastschritt das Eigengewicht um den Faktor γ/n .
- Das schichtweise Füllen: Das Eigengewicht wird in n Schichten aufgeteilt. In jedem Lastschritt wird das Eigengewicht der jeweiligen Schicht zugewiesen. Für jede Schicht kann das Eigengewicht durch m -Inkmente aufgebracht werden.

Um die numerische Oszillation aufgrund der ruckartigen Beanspruchung zu verringern, wird das Eigengewicht durch eine 3rd-Ordnung Funktion (Abbildung 4.2) aufgebracht. Beim schichtweisen Füllen werden die Flachsilo und der Trichter für die weiteren Berechnungen in zehn Schichten aufgeteilt. Das Eigengewicht jeder Schicht wird ebenso durch die 3rd-Ordnung in kleinen Inkrementen aufgebracht. Die obere spannungsfreie Schicht wird erst aktiviert, wenn sich ein Gleichgewichtszustand der darunter liegenden Schicht eingestellt hat.

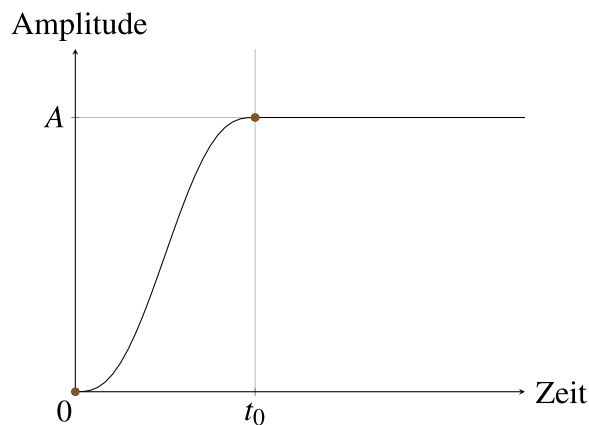


Abb. 4.2: Smooth step Funktion (ABAQUS 2014)

Untersuchungen von (ROMBACH 1991) zeigten, dass sich nur geringe Differenzen für Flachsilo zwischen den beiden Füllverfahren ergaben. Für Silos mit geneigten Wänden muss das schichtweise Füllen angewendet werden. AI u. a. 2011 und Y. WANG u. a. 2015a simulierten den progressiven Füllvorgang mit dem schichtweisen Füllen. Im Folgenden werden beide Füllvarianten angewendet und deren Ergebnisse miteinander verglichen. Das verwendete Schüttgut ist Weizen. Den folgenden Berechnungen liegen drei Siloschäfte unterschiedlicher Schlankheit zugrunde. Die FE-Berechnungen werden mit dem Drucker-Prager Modell durchgeführt, wobei die Silowand als Starrkörper betrachtet wird. Zur Überprüfung der Ergebnisse wurden Konvergenzstudien in Bezug auf die Elementanzahl durchgeführt.

Abbildung 4.3 zeigt, dass die beiden Füllmethoden bei Flachsilo die gleichen Fülllasten ergeben. Somit lässt sich die Aussage von WAGNER 2009, dass es bei gedrungenen Silos ($h/d < 1,0$) zu unterschiedlichen Druckverteilungen kommen kann, entkräften. Demgegenüber unter-

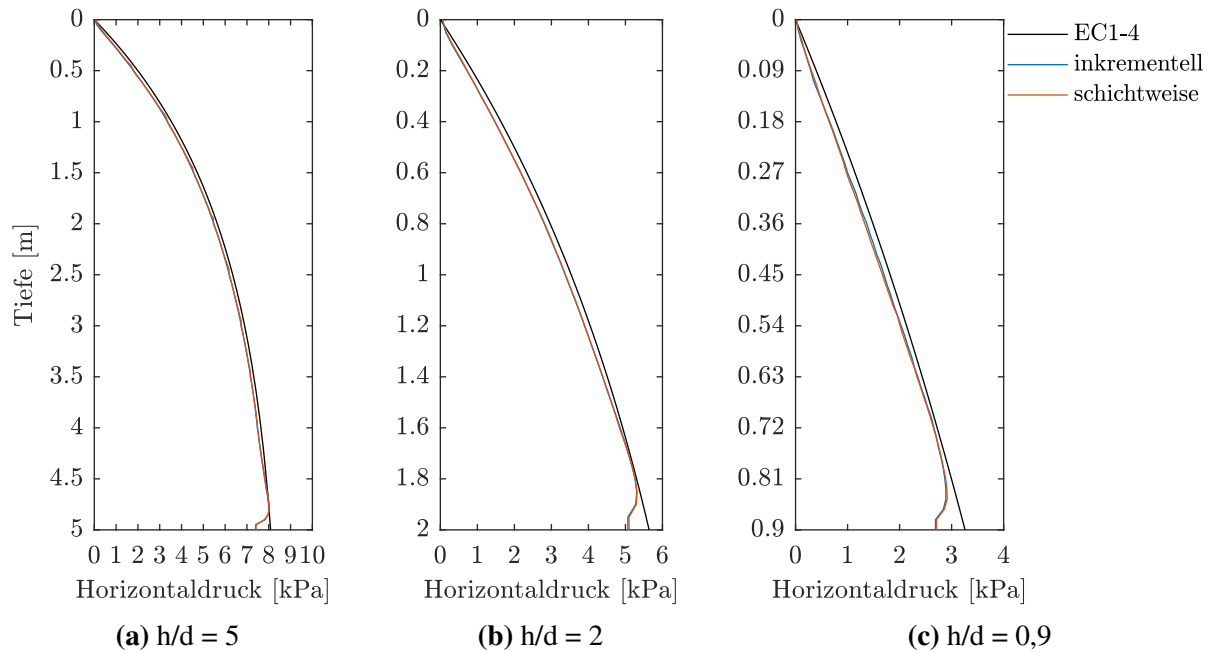


Abb. 4.3: Vergleiche der beiden Füllmethoden für den Siloschaft

scheiden sich die Wanddrücke für den Trichter nach beiden Verfahren erheblich. Der Wanddruck aus dem schichtweisen Füllen stimmt mit der analytischen Lösung sehr gut überein. Der Grund dafür liegt darin, dass das Schüttgut im oberen Teil größere Verformungen als im unteren Teil erfährt, wenn das Füllen über die gesamte Höhe geschieht. Dies wird jedoch im Gegensatz zum Schaft mit seinen vertikalen Wänden durch die Steifigkeit der geneigten Wand und die horizontale Kompression verhindert. Es findet eine Umlagerung der Spannungen vom unteren in den oberen Teil des Trichters statt, was in Abbildung 4.4 zu erkennen ist. Zudem neigen die Spannungsverläufe beim Trichter mit dem schichtweisen Füllen zu Sprüngen. Diese treten

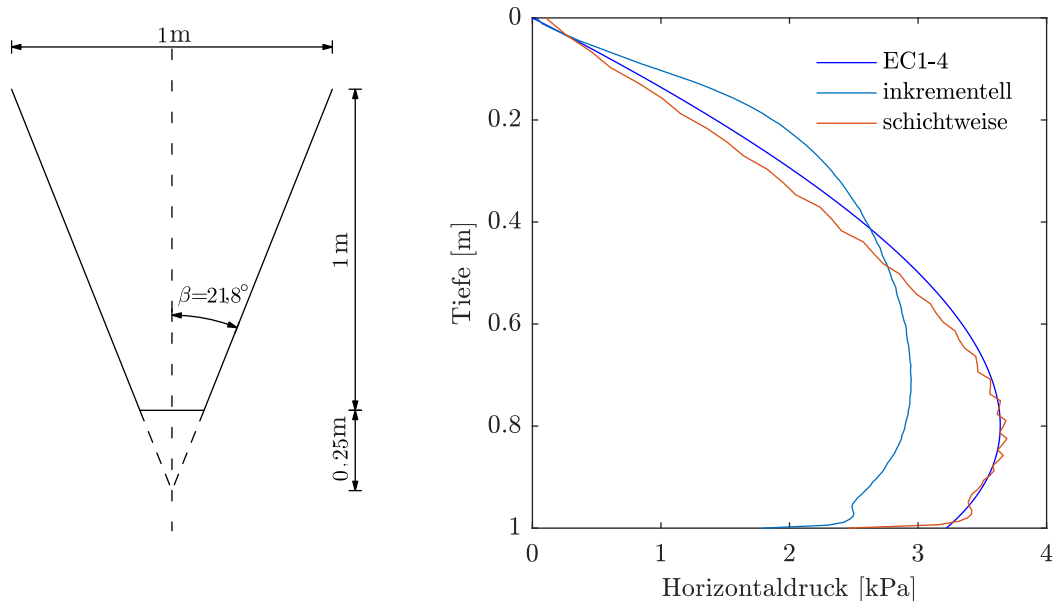


Abb. 4.4: Vergleiche der beiden Füllmethoden für den Trichter

im Übergangsbereich zwischen den einzelnen Schichten auf. Durch eine feinere Unterteilung in mehrere Schichten kann die numerische Oszillation verringert werden. Bei Silos mit einem Trichter wird die Differenz durch die Auflast aus dem Siloschaft kompensiert.

Für die weiteren Simulationen finden beide Füllmethoden je nach Problemstellung Anwendung. Aufgrund der nahezu identischen Ergebnisse beider Füllmethoden und des geringeren Rechenaufwands wird für Flachsilos das inkrementelle Füllen bevorzugt. Für Silos mit einem Trichter muss das Schüttgut schichtweise eingebracht werden, um dem realen Füllvorgang zu entsprechen.

4.2 Vergleich der ALE- und CEL-Methode

Numerische Berechnungen der Fließvorgänge in Silos erfordern leistungsstarke Verfahren, die mit großen Elementverzerrungen umgehen können. Bislang wurden häufig im Füllzustand Stabelemente unterhalb der Auslauföffnung angeordnet. Die Stablasten werden zuerst linear und zum Ende der Entleerungsphase asymptotisch auf den Wert null reduziert, sodass bei einer dreidimensionalen Modellierung nur eine Entleerungszeit von weniger als einer Sekunde erreicht werden konnte. Außerdem werden die Ergebnisse oft durch stark verzerrte Elemente verfälscht. Mithilfe der im Kapitel 3 vorgestellten Methoden können Silos über eine längere Zeit und unter Vorgabe realitätsnäherer Randbedingungen entleert werden.

4.2.1 Numerische Umsetzung

Die ALE- und die CEL-Methode unterscheiden sich stark in ihrer numerischen Umsetzung. Für die Simulation der Fließvorgänge in Silos sind die FE-Modelle, wie in Abbildung 4.5 dargestellt, aufgebaut. Bei der ALE-Methode wird ein ALE-Gebiet für das gesamte Schüttgut erstellt, in dem ein Remesh stattfindet. Im Füllzustand ist eine vertikale Festhaltung im Auslaufbereich vorgesehen. Für die Entleerung wird die Festhaltung deaktiviert, sodass das Schüttgut in Bewegung gesetzt wird. Durch den eulerschen Rand verlässt das Schüttgut das Rechnetz, ohne dass die Berechnung wegen stark verzerrter Elemente unterhalb der Auslauföffnung abbricht. Mäßige Elementverzerrungen im Silo werden durch adaptive Vernetzungsalgorithmen korrigiert. In Kapitel 4.3.2 werden zum Vergleich die Ergebnisse nach der herkömmlichen FEM vorgestellt.

Bei der CEL-Methode wird ein Euler-Gebiet abgebildet. Dieses wird so gewählt, dass das Schüttgut vollständig eingeschlossen ist. Unterhalb des Schüttgutes sind leere Elemente an-

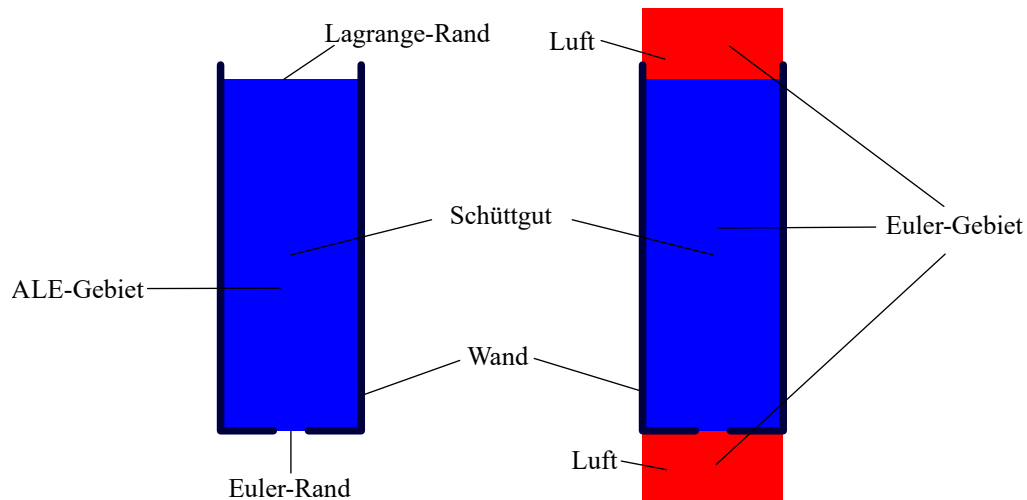


Abb. 4.5: Prinzipskizze der ALE- und CEL-Methode zur Simulation der Siloentleerung

zuordnen, in welche das Schüttgut nach Beginn der Entleerung hineinfließen kann. Da im Rahmen dieser Arbeit das Silo nicht nachgefüllt wird, müssen zusätzlich leere Elemente oberhalb des Schüttgutes angeordnet werden, um Bewegungen freier Oberflächen zu ermöglichen. In ABAQUS ist keine ebene Untersuchung mit Hilfe der CEL-Technik möglich. Infolgedessen werden die Berechnungen mit beiden Verfahren räumlich durchgeführt.

4.2.2 Vergleich der Ergebnisse

Für den Vergleich der beiden Methoden wird ein Flachsilo mit einer Höhe von 6,0 m und einem Radius von 1,0 m herangezogen. Die Auslauföffnung ist zentrisch angeordnet und hat einen Radius von 0,25 m. Die Berechnungen werden mit einer Grenzbedingung nach Drucker-Prager für das Schüttgut durchgeführt. Die verwendeten Schüttgutparameter sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Das Silo wird in beiden Methoden unter Eigengewicht und einheitlichen Randbedingungen entleert. Bei der Simulation des Füllvorgangs wird das inkrementelle Füllen angewendet. Die Berücksichtigung des Eigengewichts erfolgt über den Sooth Step. In den ersten 10 Sekunden wird das Eigengewicht über die gesamte Höhe aufgebracht. Von 10 s bis 12 s folgt der Speichervorgang, um einen stabilen Füllzustand zu erreichen. Nach dem Speichervorgang verschwindet die kinematische Energie, da sich das Schüttgut in Ruhelage befindet. Anschließend wird das Silo so weit entleert, bis sich ein stationärer Zustand eingestellt hat.

Tab. 4.1: Schüttgutparameter für die numerische Modellierung

Wichte γ	15 kN/m ³
Elastizitätsmodul E	2 MPa
innerer Reibungswinkel $\phi_{i,DP}$	39,8°
Wandreibungskoeffizient μ	0,3
Dilatanzwinkel ψ	10°

Abbildung 4.6 zeigt den Vergleich der Wanddrücke bei verschiedenen Entleerungszeitpunkten. Da das Silo zentrisch entleert wird, ist der Unterschied der Wanddrücke in Umfangsrichtung bei den beiden Methoden verschwindend gering, sodass keine räumliche Druckverteilung erforderlich ist. Es handelt sich hierbei um eine gemittelte Spannung in Umfangsrichtung. Der Zeitpunkt $t = 0$ s entspricht der Fülllast. Zum Vergleich wird noch der Wanddruck nach DIN EN 1991-4 dargestellt. Da der Gültigkeitsbereich der Normgleichung auf die Berechnung der Fülldrücke beschränkt ist und für die Entleerungslasten mit Erhöhungsfaktoren gearbeitet wird, wird die Normlast für die weiteren Berechnungszeitpunkte nicht zum Vergleich herangezogen. Der Vergleich der Wanddrücke nach dem Füllvorgang weist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen aus den numerischen Lösungen und der analytischen Lösung auf. Die Verläufe mit der ALE- und CEL-Methode unterscheiden sich im oberen Bereich kaum. Im unteren Bereich steigt der Wanddruck nach der CEL-Methode überproportional an und überschreitet den Wanddruck nach der Janssen-Gleichung.

Sobald das Schüttgut in Bewegung ist, stellt sich im unteren Bereich innerhalb kurzer Zeit der Entleerungszustand ein. Es entstehen tote Zonen, die zur Verengerung des Fließprofils führen. Spannungsspitzen entstehen am Übergang vom aktiven zum passiven Spannungsfeld, da das Schüttgut in horizontaler Richtung zusammengedrückt wird, während sich die Vertikalspannung verringert. Die Hauptspannung ändert ihre Richtung über die Höhe und es bildet sich eine erhöhte Wandnormalspannung am Übergang aus.

An der Spannungsspitze in der Tiefe von 5,0 m steigt der Druck nach beiden Methoden bei $t = 0,5$ s von $18,7 \text{ kN/m}^2$ auf $25,7 \text{ kN/m}^2$. Nach $t = 1$ s nehmen die Spannungsspitzen weiter zu. Ab $t = 2$ s bleiben beide Verläufe stabil. Die Spannungsspitze liegt nach beiden Methoden bei $h = 1,5$ m an dem gleichen Ort. Im stationären Zustand neigen beide Drücke im unteren Bereich zu sägezahnförmigen Verläufen. Die Spannungsspitze nach der ALE-Methode ist etwas höher als die nach der CEL-Methode. Die Wanddrücke über dem Boden bleiben im Entleerungszustand nahezu unverändert, da sich die Position und die Spannungsverteilung der toten Zonen nicht geändert haben.

4.2 Vergleich der ALE- und CEL-Methode

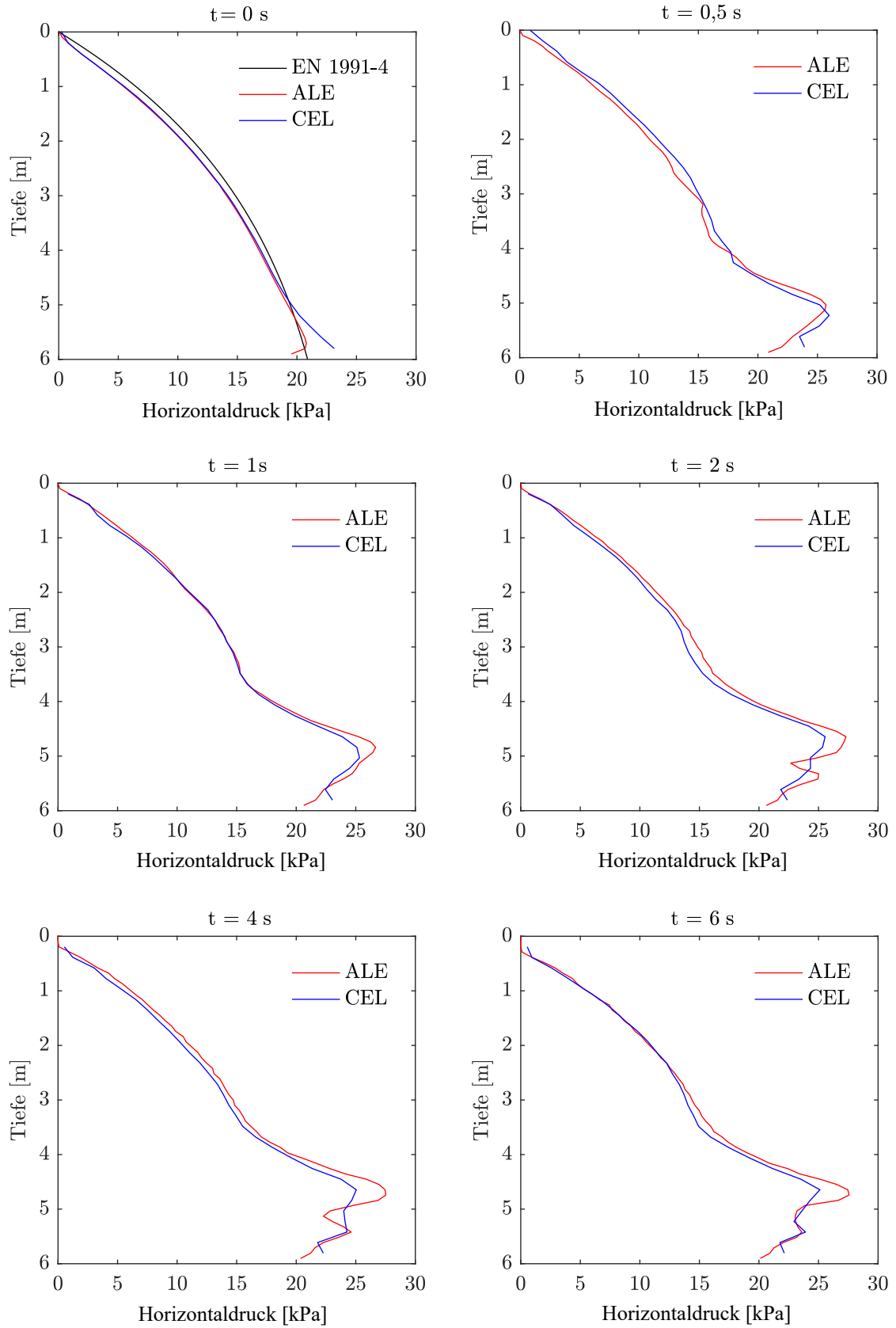


Abb. 4.6: Wanddrücke bei unterschiedlichen Zeitpunkten im Entleerungsprozess

Abbildung 4.7 zeigt die über den Umfang gemittelten Wanddrücke in unterschiedlichen Höhenlagen über die Zeit. Im Füllzustand sind die Verläufe an den vier Stellen nahezu identisch. Im Abstand von 1 m oberhalb des Bodens steigt die Last im ALE-Modell ruckartig an, während der Anstieg im CEL-Modell geringer ist. Nach kurzer Zeit nehmen die beiden Spannungen etwas ab, da die Spannungsspitze nach oben wandert. Im stationären Zustand wird der Unterschied verschwindend gering. In der Höhenlage $h = 2$ m nehmen die Wanddrücke in beiden Modellen zunächst zu, der Wanddruck im ALE-Modell sinkt jedoch leicht ab, bis sich der Wert stabilisiert hat. Die Wanddrücke in den Höhenlagen von 3 m und 4 m verändern sich kaum, da im oberen Bereich Massenfluss stattfindet und sich das Schüttgut gleichmäßig nach unten bewegt.

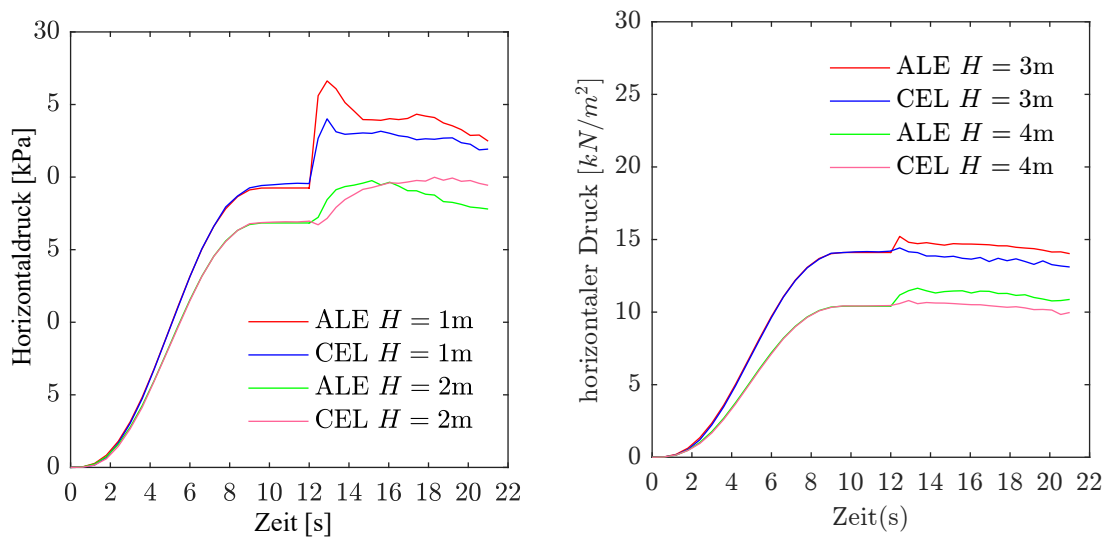


Abb. 4.7: Wanddrücke in unterschiedlichen Höhenlagen über die Zeit

Da das Silo unter Eigengewicht entleert wird, entwickelt sich eine hohe Geschwindigkeit am Auslass. In Abbildung 4.8 sind die Geschwindigkeitsfelder nach einer Entleerungszeit von 0,5 s zu sehen. Nach bereits 0,5 s wird nach der CEL-Methode eine Geschwindigkeit von 2,44 m/s erreicht. Mit der ALE-Methode wird ein schnelleres Fließen betrachtet. Das erklärt, weshalb die Spannungsspitze schneller nach oben wandert. Der Vorteil der CEL-Methode ist, dass das bereits ausgeflossene Schüttgut noch weiter verfolgt werden kann und sich damit eine stabile Berechnung ergibt. Bei der ALE-Methode wird eine Entleerungszeit von 9 s erreicht. Die Berechnung bricht aufgrund einer Singularitätsstelle am Rand der Auslauföffnung ab. Um eine numerische Oszillation sowie eine längere Entleerungszeit zu erreichen, sollten unstetige Randbedingungen wie das freie Fließen unter Eigengewicht durch volumengesteuertes Entleeren vermieden werden.

Insgesamt lässt sich zeigen, dass beide Modelle sowohl quantitativ als auch qualitativ das gleiche Fließverhalten zeigen. Hierbei ist festzustellen, dass mit der CEL-Methode ein langsameres Fließen als mit der ALE-Methode betrachtet wird. Grundsätzlich können beide Methoden

für die Simulation der Fließvorgänge in Silos verwendet werden, jedoch reagieren die CEL-Modelle aufgrund der großen Kontaktfläche bei der Konvergenzuntersuchung sehr empfindlich auf unterschiedliche Diskretisierungen. Es erfordert eine sorgfältige Diskretisierung in Bezug auf eine geeignete Elementgröße. Außerdem ist der Rechenaufwand bei der gleichen Diskretisierung wesentlich höher als bei der ALE-Methode. Da die großen Elementverzerrungen unterhalb der Auslauföffnung mit einem Euler-Rand umgangen und die Geometrie der mäßig verzerrten Elemente im Siloinneren durch die adaptiven Vernetzungsalgorithmen angepasst werden können, eignet sich die ALE-Technik hervorragend für die Simulation der Fließvorgänge. Für die weiteren Berechnungen in den folgenden Kapiteln wird daher die ALE-Technik verwendet.

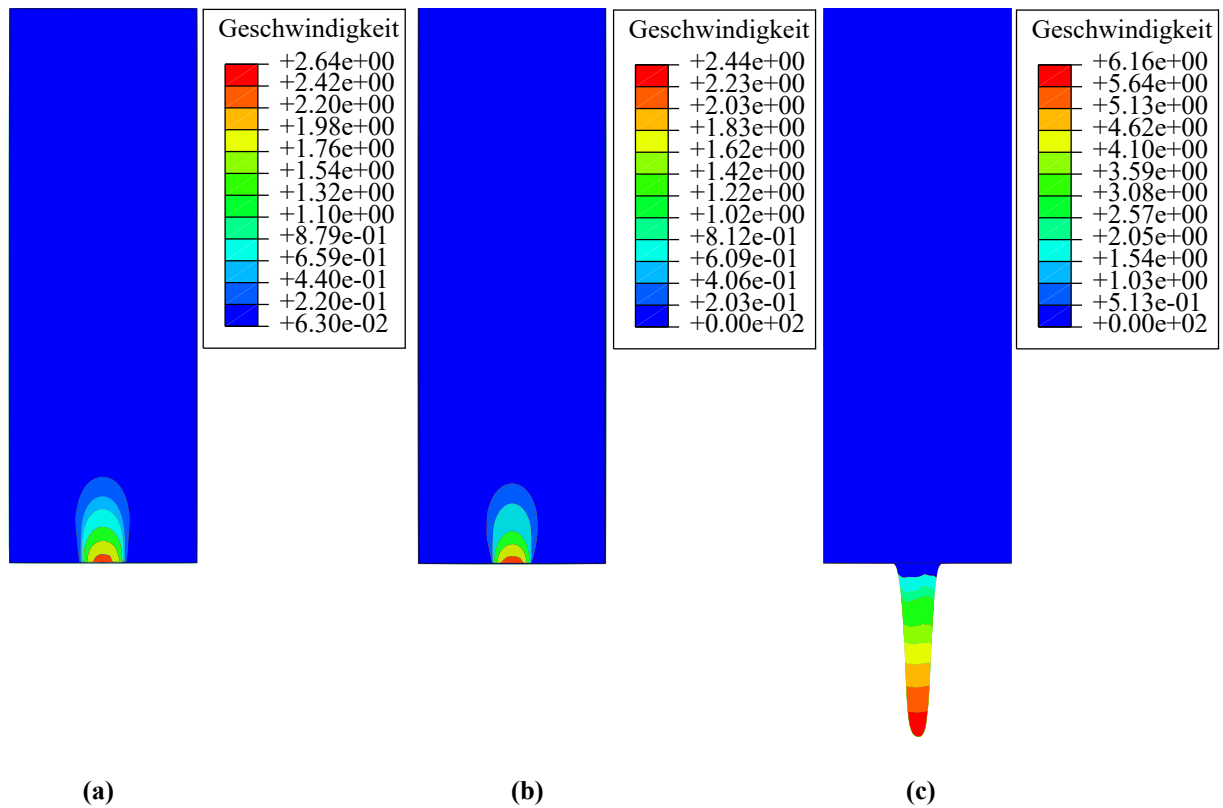


Abb. 4.8: Geschwindigkeitsfelder bei einer Entleerungszeit von 0,5 s: (a) im Schaft mit der ALE-Methode (Symmetrieebene), (b) im Schaft mit der CEL-Methode (Symmetrieebene), (c) das gesamte Schüttgut mit der CEL-Methode (Seitenansicht)

4.3 Einfluss der Auszugsgeschwindigkeit und Auslauföffnung

Wie bereits erläutert, verhält sich das Schüttgut weder wie ein Festkörper noch wie eine Flüssigkeit. Beschreibt man das Fließverhalten mit der Viskosität, hängt die Schubspannung deutlich vom Schergefälle bzw. der Geschwindigkeit ab. ARTONI u. a. 2009 simulierte das Schüttgut als Pseudofluid und untersuchte den horizontalen Wanddruck in Abhängigkeit der Auslaufgeschwindigkeit. Bei einer Erhöhung der Auslaufgeschwindigkeit von 0,01 m/s auf 0,05 m/s steigt der horizontale Druck im unteren Bereich des Schafts um etwa 25% an. Dies steht nicht im Einklang mit der Erkenntnis, dass das Schergefälle bei typischen im Schüttgut auftretenden Fließvorgängen kaum eine Rolle spielt (SCHULZE 2014). In Abbildung 4.9 sind die Unterschiede im Fließverhalten zwischen Fluid und Schüttgut in Abhängigkeit der Geschwindigkeit graphisch dargestellt.

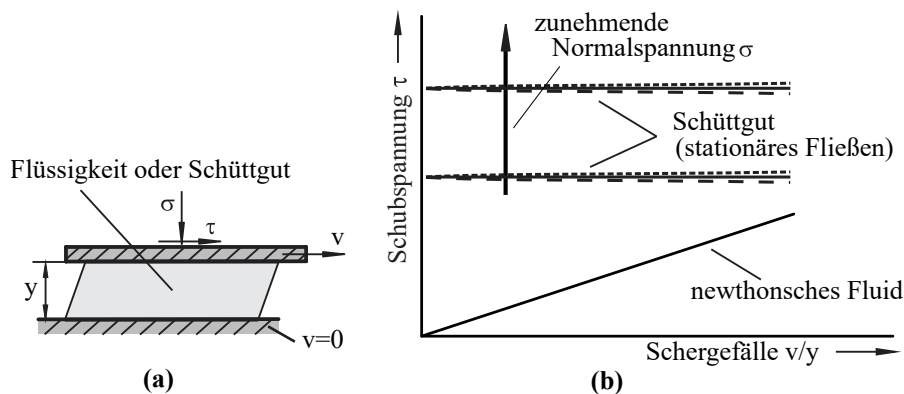


Abb. 4.9: (a) Aufbau zur Messung der Schubspannung τ in Abhängigkeit vom Schergefälle und von der Normalspannung; (b) Fließverhalten eines newtonschen Fluids im Vergleich zu einem Schüttgut (SCHULZE 2014)

Um den Einfluss zu verdeutlichen, wird das oben genannte Silo mit den in Tabelle 4.2 aufgelisteten Parametern untersucht. Das Silo wird zunächst unter Eigengewicht entleert. Bereits nach 0,1 s wird eine vertikale Geschwindigkeit von 3,06 m/s erreicht. Nach 1 s bleibt die Auslaufgeschwindigkeit konstant. Abbildung 4.10 verdeutlicht die Verteilung am Auslass. Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt 2,73 m/s. Dies entspricht einer Absenkgeschwindigkeit

Tab. 4.2: Schüttgutparameter für die numerische Modellierung (Y. WANG u. a. 2015b)

Dichte ρ	1000 kg/m ³
Elastizitätsmodul E	$5,5 \times 10^5$ kPa
innerer Reibungswinkel $\phi_{i,DP}$	30°
Wandreibungskoeffizient μ	0,267
Dilatanzwinkel ψ	10°

4.3 Einfluss der Auszugsgeschwindigkeit und Auslauföffnung

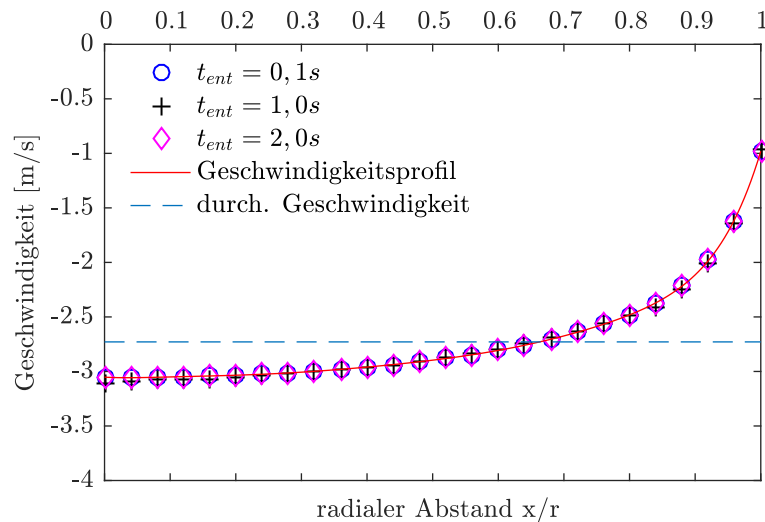


Abb. 4.10: Entwicklung der Auslaufgeschwindigkeit und die Geschwindigkeitsverteilung am Auslass beim Fließen unter Eigengewicht

der Oberfläche von 0,17 m/s. In der Regel fließt das Schüttgut mit deutlich geringeren Geschwindigkeiten. Für die Vergleichsuntersuchungen wird die Geschwindigkeit am Auslauf so gesteuert, dass die Oberfläche durchschnittlich um jeweils 0,1 m/s, 0,05 m/s und 0,01 m/s absinkt. Diese entsprechen jeweils einem Massenstrom q_m von 314 kg/s, 157 kg/s und 31,4 kg/s. Der entsprechenden Geschwindigkeitsverteilung am Auslass wird das gleiche Geschwindigkeitsprofil zugewiesen.

In Abbildung 4.11 sind die horizontalen Drücke bei unterschiedlichen Entleerungszeitpunkten mit den verschiedenen Massenströmen dargestellt. In (a) sind die horizontalen Drücke bei Erreichen der vorgegebenen Geschwindigkeiten dargestellt. Daran ist zu erkennen, dass sich der stabile Wanddruck umso langsamer einstellt, je kleiner die Geschwindigkeit ist. Um den horizontalen Druck bei gleich bleibender Schüttguttiefe zu untersuchen, wird der Massenstrom mit 314,2 kg/m als Referenzmodell verwendet. Dabei wird das Schüttgut nach dem Füllzustand um 1,6 % entleert. Das rechte Bild deutet darauf hin, dass die Geschwindigkeit eine Rolle bei der Entwicklung des Entleerungsdrucks, jedoch nicht für den Endzustand spielt. Der Grund dafür liegt darin, dass die kinematische Energie selbst beim Entleeren unter Eigengewicht nur einen Bruchteil von der gesamten Energie beträgt.

4 Numerische Simulation

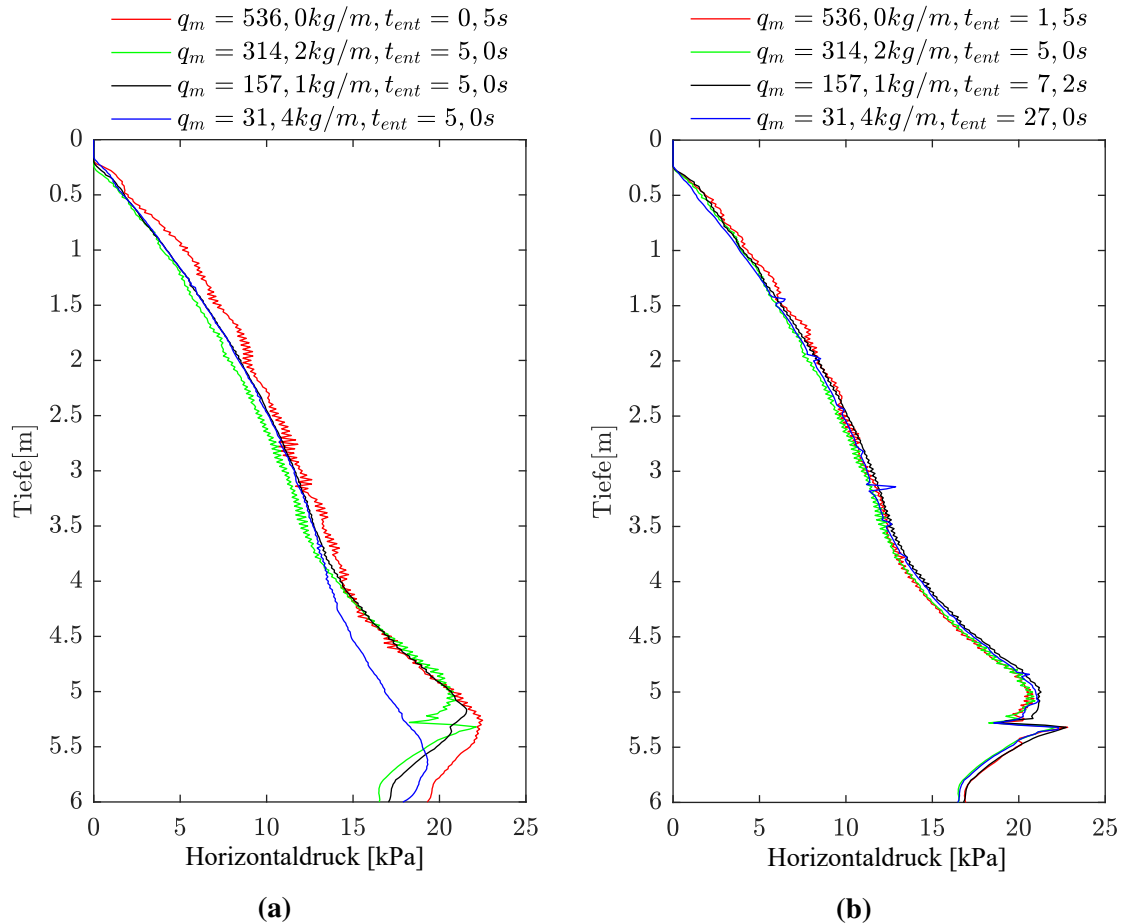


Abb. 4.11: Horizontale Wanddrücke: (a) Bei stabilisierter Geschwindigkeit am Auslass, (b) Bei dem gleichen Entleerungsvolumen $V_{dis} = 1.5\%$

Beim Entleeren bewegen sich die Schüttgutteilchen zur Auslauföffnung. Außer der senkrecht verlaufenden Primärbewegung sind die Schüttgutpartikel einer zusätzlichen horizontalen Sekundärbewegung im unteren Bereich unterworfen. Der beim Entleeren entstehende Abflusstrichter kann durch die Darstellung der plastischen Vergleichsdehnung verdeutlicht werden. In Abbildung 4.12 sind die Bruchstellen deutlich zu erkennen. Sie können als Abgrenzung der Bewegungszonen betrachtet werden. Diese Abgrenzungslinie ähnelt dem experimentell beobachteten qualitativen Fließprofil von KOTCHANOVA 1970. Eine schnelle Auslaufgeschwindigkeit beeinflusst die Bruchstelle nicht, verursacht aber einen raschen Scherbruch. Die Bruchstelle liegt bei $h = 0,8 \text{ m}$. Ab diesem Punkt nimmt der Wanddruck bis zum Boden hin ab. Mit fortschreitendem Bruch vergrößert sich der Übergang zwischen dem schnell und dem langsam fließenden Schüttgut. Mit zunehmender Fließfläche an der Wand tritt in diesem Bereich ein sägezahnförmiger Verlauf auf.

4.3 Einfluss der Auszugsgeschwindigkeit und Auslauföffnung

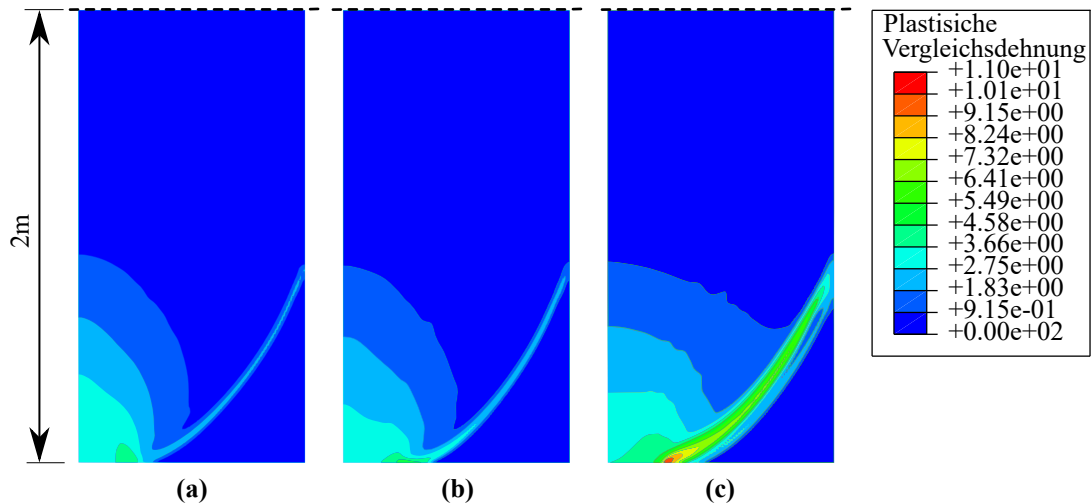


Abb. 4.12: Plastische Vergleichsdehnung: (a) $q_m = 536,0 \text{ kg/m}$, $V_{dis} = 3,5\%$, (b) $q_m = 31,4 \text{ kg/m}$, $V_{dis} = 3,5\%$, (c) $q_m = 31,4 \text{ kg/m}$, $V_{dis} = 10\%$

Sowohl die Form als auch die Größe der Auslauföffnung gehen nicht in das Bemessungsmodell ein. Um mögliche Einflussfaktoren für spätere Parameteruntersuchungen auszuschließen, wird die Auslauföffnung auf 0,5 m vergrößert. Da die Auslaufgeschwindigkeit den horizontalen Druck kaum beeinflusst, wird ein Massenstrom von 314,2 kg/m vorgegeben. Abbildung 4.13 zeigt, dass sich der horizontale Druck bei doppeltem Durchmesser der Auslauföffnung lediglich im unteren Bereich minimal vergrößert. In Abbildung 4.14 ist eine steilere Bruchfläche im Vergleich zu Abbildung 4.12 zu erkennen. Der tiefste Punkt des Trichters am Rand bleibt jedoch an der gleichen Stelle, sodass sich die Knickpunkte des Verlaufs an der gleichen Stelle befinden. Im Vergleich zu Abbildung 4.6 ist der Neigungswinkel der Bruchfläche flacher, da der innere Reibungswinkel kleiner und das Schüttgut somit fließfähiger ist.

Aufgrund der Einschränkung des Drucker-Prager Modells können insbesondere im auslaufnahen Bereich nicht alle Details des Fließverhaltens realistisch erfasst werden. Das reale Fließverhalten ist tatsächlich sehr kompliziert. Aus der ingenieurmäßigen Sicht wird der Scherbruch jedoch hauptsächlich von dem inneren Reibungswinkel und dem Wandreibungskoeffizienten beeinflusst, ebenso von der Mikrostruktur, wie der Partikelform und der Partikelverteilung, die nur mithilfe der Partikelmethode untersucht werden können.

4 Numerische Simulation

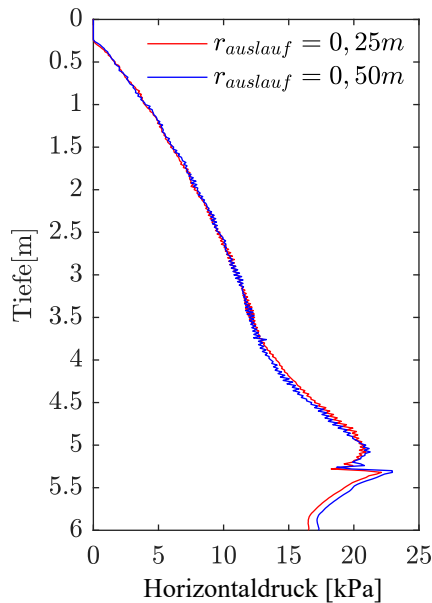


Abb. 4.13: Horizontaldrucke unterschiedlicher Auslaufgröße bei dem gleichen Entleerungsvolumen $V_{dis} = 1.5\%$

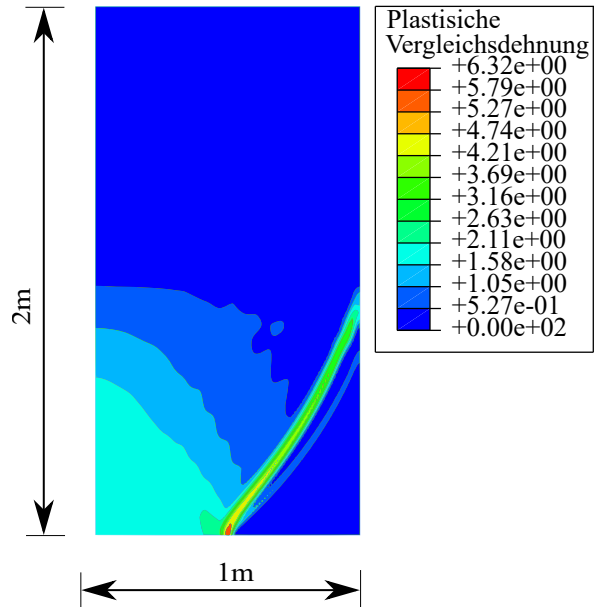


Abb. 4.14: Plastische Vergleichsdehnung;
 $r_{Auslauf} = 0,5m, V_{dis} = 5\%$

4.4 Vergleich der Elasto-Plastizität und der Hypoplastizität

4.4.1 Vergleich der UMAT- und VUMAT-Subroutinen für die Hypoplastizität

Ein für die numerische Simulation geeignetes Stoffgesetz ist neben der Modellierungstechnik von zentraler Bedeutung. In der Literatur haben sich das elasto-plastische Stoffmodell und die Hypoplastizität nach WOLFFERSDORFF 1996 und NIEMUNIS u. a. 1997 etabliert. Im Folgenden werden Vergleichsberechnungen unter Anwendung beider Stoffmodelle durchgeführt.

Die in dieser Arbeit verwendeten Quellcodes für die Hypoplastizität, die User-Subroutinen „umat“ für das implizite Verfahren sowie „vumat“ für das explizite Verfahren, sind in (GUDEHUS u. a. 2008) enthalten und können frei verfügbar heruntergeladen werden. In Form einer Subroutine kann das Stoffmodell durch Schnittstellen in ABAQUS implementiert werden.

Die Richtigkeit der VUMAT-Subroutine hat (BIENEN u. a. 2014) durch Vergleichsberechnungen des Elementtests an einem Ödometerversuch bestätigt. Zum Vergleich wird nur der statische Füllvorgang simuliert. Das verwendete Schüttgut ist der Hochstetten Sand. Die verwen-

4.4 Vergleich der Elasto-Plastizität und der Hypoplastizität

Tab. 4.3: Stoffparameter für das hypoplastische Stoffmodell für Hochstetten Sand (NIEMUNIS u. a. 1997)

Parameter für das Grundmodell								Parameter für die Erweiterung mit intergranularen Dehnungen				
ϕ_c	h_s	n	e_{c0}	e_{d0}	e_{i0}	α	β	R	m_R	m_T	β_r	χ
[°]	[MPa]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
33	1000	0,25	0,95	0,55	1,05	0,25	1,50	$1 \cdot 10^{-4}$	5,0	2,0	0,5	6,0

deten Parameter sind in Tabelle 4.3 enthalten. Außerdem wird für die Berechnungen von einer Anfangsporenzahl von 0,73 ausgegangen. Um den Einfluss der Kontaktfläche auf die Simulationsergebnisse zu untersuchen, werden drei unterschiedliche Randbedingungen in drei Modellen abgebildet. Abbildung 4.15 zeigt die drei zu untersuchenden Modelle, die alle die gleiche Geometrie haben. Das Modell (a) beinhaltet kein Kontaktelement. Die vertikale und seitliche Stützung wird durch Auflager ersetzt. Im Modell (b) wird der Sand seitlich und unten von der Silowand gestützt. Die Wand wird als reibungslos modelliert. Im Modell (c) wird ein Reibungskoeffizient zwischen dem Sand und dem Schaft von 0,4 verwendet.

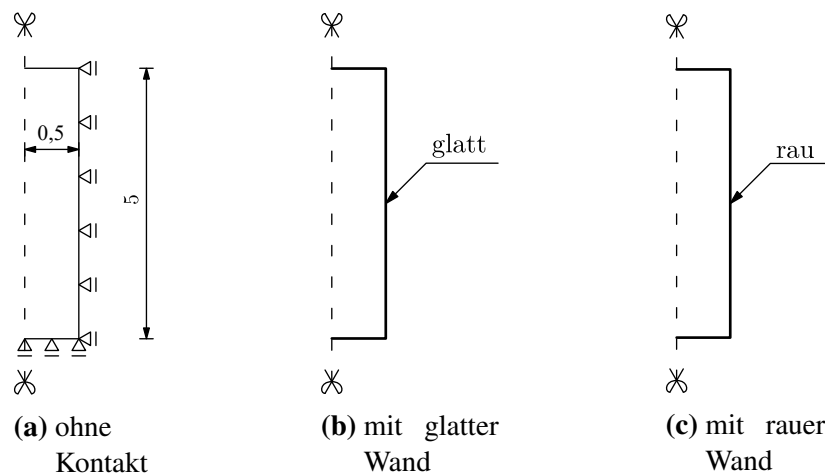


Abb. 4.15: Geometrie und Randbedingungen der zu untersuchenden Modelle [m]

Abbildung 4.16 zeigt die Ergebnisse beider Subroutinen, in denen sich erhebliche Unterschiede erkennen lassen. In Abbildung 4.16(a) verläuft der horizontale Druck linear, da das Gewicht nur über den Boden abgetragen wird. Beide Subroutinen (die UMAT und die VUMAT) für das Modell (a) und die VUMAT für das Modell (b) ergeben nahezu identische Ergebnisse. Ein Ausreißer ist das Modell (b) mit VUMAT. Ebenso ergibt das Modell (c) mit der VUMAT einen unrealistischen Verlauf. Aus den unplausiblen Ergebnissen kann man ableiten, dass die VUMAT unzuverlässige Ergebnisse erzeugt, wenn Kontaktelemente involviert sind. Diese überraschende Erkenntnis ist auf den ersten Blick schwer nachvollziehbar, da diese Subroutine in mehreren Veröffentlichungen „erfolgreich“ eingesetzt wurde. Weitere Untersuchungen ergaben jedoch, dass dieses Problem mit Kontaktelementen häufig umgangen wurde. Meist wurden Kontaktflächen durch starre Lagerungen am Rand ersetzt, sodass Kontaktelemente durch eine vereinfachte

4 Numerische Simulation

Modellierung vermieden wurden. Oft wird statt der Kontaktspannung nur die gesamte Kontaktkraft ausgegeben, die zum Teil mit experimentellen Ergebnissen nicht übereinstimmt. In der Arbeit von KAYA 2016 konnten keine Kontaktspannungen quantitativ korrekt berechnet werden. In jüngster Vergangenheit wurde anhand der Simulation von Drucksondierungen mit der VUMAT festgestellt, dass der Kontakt gravierende Probleme bereiten kann.

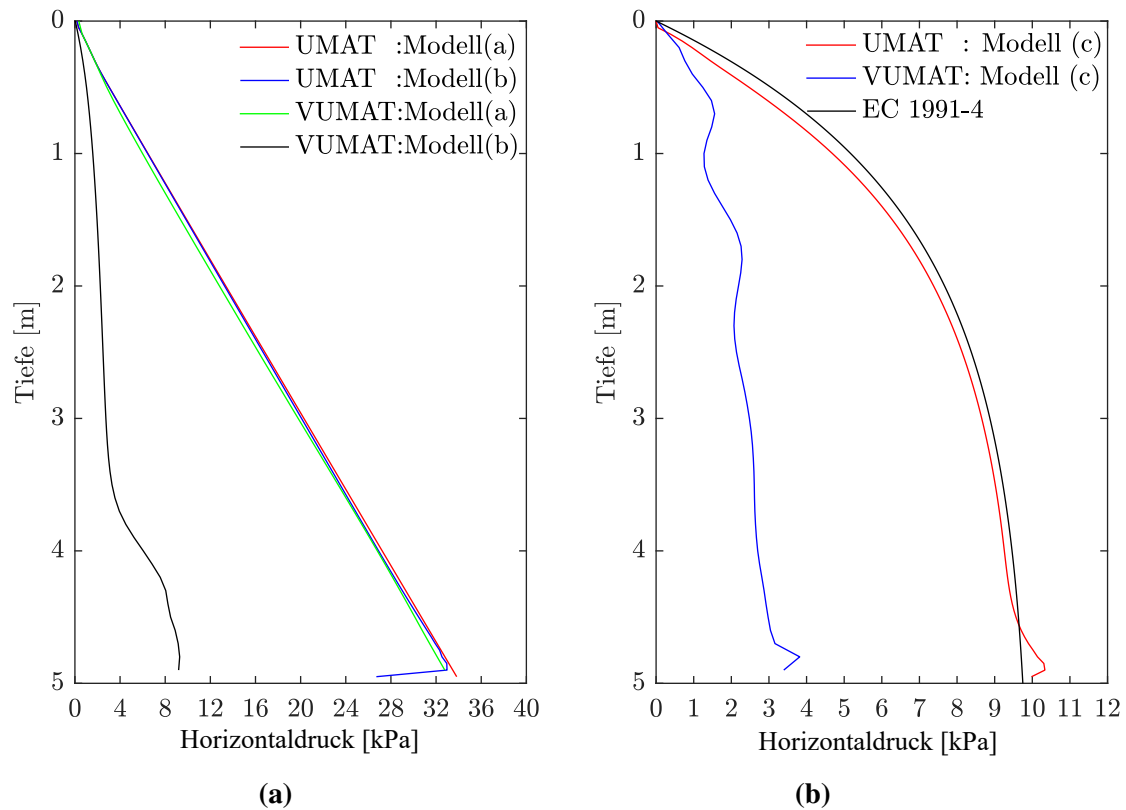


Abb. 4.16: Horizontale Drücke in unterschiedlichen Modellen mit dem implizite (UMAT) und expliziten (VUMAT) Verfahren

Es bleibt offen, warum die VUMAT bei vorhandenen Kontaktelementen unplausible Ergebnisse erzeugt. Ein Grund könnte in den unterschiedlichen Integrationsverfahren beider Subroutinen liegen, welche unterschiedlich auf dem Kontaktalgorithmus reagieren. (STUTZ u. a. 2017) entwickelte ein Interface-Model für granulare Kontaktreibung basierend auf der Hypoplastizität, mit dem das Kontakverhalten granularer Medien verifiziert und validiert wurde. Das Interface-Model wurde für die UMAT erfolgreich implementiert. In Zukunft lässt sich aufgrund des wachsenden Bedarfs am expliziten Verfahren (VUMAT) hoffen, dass das hypoplastische Interface-Model eine Lösung für die Probleme mit den Kontaktelementen anbietet.

4.4.2 Ergebnisse der Füll- und Entleerungsberechnungen beider Stoffmodelle

Aufgrund des festgestellten Problems mit der VUMAT-Subroutine wird für den Vergleich beider Stoffmodelle das implizite Verfahren mit der UMAT-Subroutine verwendet. Für implizite Berechnungen kann die ALE-Methode nicht verwendet werden. Um dennoch den Einfluss beider Stoffmodelle untersuchen zu können, wird das Silo solange entleert, bis die Berechnungen wegen einer zu großen Elementverzerrung abgebrochen werden.

In der Literatur sind die Stoffparameter eines Schüttgutes selten für unterschiedliche Stoffmodelle angegeben. In der Arbeit von NEUMANN 2006 sind Vergleichsberechnungen für Weizen mit beiden Stoffmodellen zu finden. Die berechneten Ergebnisse mit ANSYS und dem Forschungsprogramm SILO zeigen deutliche Unterschiede. Besonders für den Entleerungszustand konnte mit beiden Programmen kein zuverlässiger Wanddruck ermittelt werden. Zum Vergleich soll in dieser Arbeit ebenfalls das Schüttgut Weizen untersucht werden. Die verwendeten Parameter für das hypoplastische Modell sind in Tabelle 4.4 und für das Drucker-Prager Modell in Tabelle 2.2 aufgelistet. Weil Parameter für das intergranulare Dehnungskonzept nicht vorhanden sind, werden bei der Eingabe der Stoffparameter die fehlenden Parameter zu Null gesetzt. Da das hypoplastische Stoffmodell keinen Bereich unter Zugspannung definiert, wird eine Kohäsion von 1 kPa für die numerische Stabilität vorgegeben. Untersuchungen mit Kohäsionen von 0,01 kPa und 0,1 kPa ergaben den gleichen Wanddruck.

Tab. 4.4: Stoffparameter für das hypoplastische Stoffmodell für Weizen (NEUMANN 2006)

ϕ_c	h_s	n	e_{c0}	e_{d0}	e_{i0}	α	β
[°]	[MPa]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
25,2	20	0,37	0,84	0,57	0,95	0,02	1,00

Um große dynamische Effekte zu vermeiden, werden Silos meistens volumengesteuert entleert. Bei den zu untersuchenden Modellen ist eine Absenkgeschwindigkeit der oberen Fläche von 0,02 m/s vorgegeben. Für die Numerik wird dadurch eine längere Entleerungszeit erreicht. Da die Simulation im Allgemeinen empfindlich auf die Unstetigkeit der Belastung und der Randbedingung reagiert, wird die dynamische Oszillation mit Hilfe einer geregelten Öffnungsgeschwindigkeit mit dem smooth-step vermieden. Die stationäre Entleerungsgeschwindigkeit am Auslass berechnet sich aus der Absenkgeschwindigkeit. Mit der smooth-step Funktion wird nach 5 s die Amplitude 1 erreicht. Eine plausible Geschwindigkeitsverteilung über die Auslaufbreite ist essentiell für das Konvergenzverhalten. Die maximale Auslaufgeschwindigkeit des

4 Numerische Simulation

Schüttgutes wird in der Mitte erreicht und reduziert sich zum Boden hin. Die von JANDA u. a. 2012 an Versuchsdaten approximierende Gleichung 4.1 wird verwendet.

$$v(x) = \sqrt{2gr} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad (4.1)$$

mit r : Radius der Auslauföffnung

x : Der Abstand vom Auslauföffnungsmittelpunkt aus

Bereits nach 2,9 s und 4,4 s werden die Berechnungen mit dem Drucker-Prager Modell und der Hypoplastizität abgebrochen. In Abbildung 4.17 (a) und (b) sind horizontale Drücke zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Nach kurzer Zeit verändert sich im unteren Bereich der aktive in einen passiven Spannungszustand. Die maximale Hauptspannung ändert sich von der vertikalen in die horizontale Richtung, was zu einer Spannungsspitze führt. Die Position der Spannungsspitze wandert hoch, bis sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. In beiden Modellen liegt die Stelle der maximalen Spannung bei $h = r = 0,5$ m. In Abbildung 4.17(c) sind die Fülllasten und die gemittelten Entleerungslasten dargestellt. Mit dem Drucker-Prager Modell ist eine Verformung im Füllzustand wegen der Elastizität sehr gering, während die Verformung im Anfangszustand mit der Hypoplastizität erkennbar ist, welche auf das inelastische Stoffverhalten zurückzuführen ist. Berücksichtigt man den Anfangsspannungszustand (d.h. die Höhe der

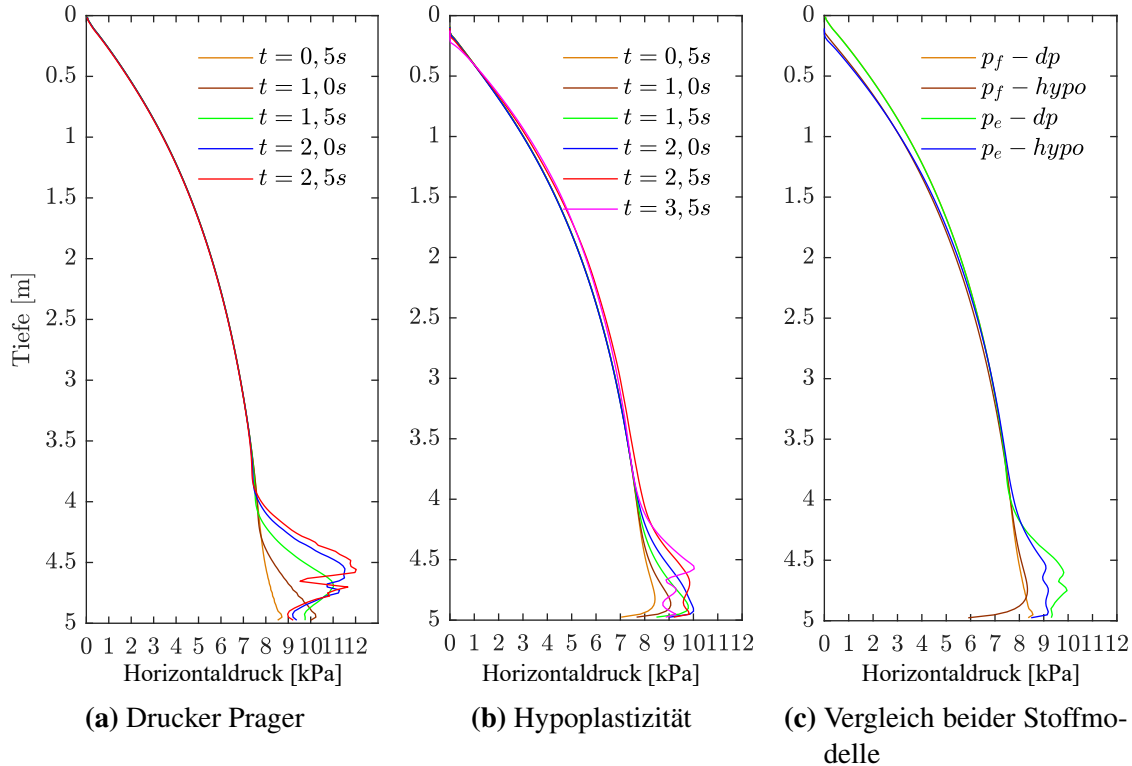


Abb. 4.17: Horizontalrücke beider Stoffmodelle zu verschiedenen Zeitpunkten, p_f : Fülllast, p_e : Entleerungslast.

4.4 Vergleich der Elasto-Plastizität und der Hypoplastizität

Schüttgutoberfläche beträgt nach dem Befüllen 5 m), kann die Abweichung minimiert werden. Dies ist jedoch aufgrund der geringen Abweichung nicht erforderlich und wird nicht weiter betrachtet. Beide Entleerungslasten ähneln einander quantitativ sehr. Der mit der Hypoplastizität berechnete Wanddruck ist kleiner als der mit dem Drucker-Prager Modell. Ein Grund dafür könnte darin liegen, dass eine Spannungsumlagerung durch die unterschiedlichen Steifigkeiten für Be- und Entlastung stattfindet, die sich günstig auf den Wanddruck auswirkt.

Abbildung 4.18 zeigt die Hauptspannungen während der Entleerung. Es lassen sich keine wesentlichen Abweichungen erkennen. Festzustellen ist, dass mit der Hypoplastizität ein langsames Fließen einsetzt. Bei $t = 1,5\text{ s}$ ist das Fließen mit dem Drucker-Prager Modell weiter fortgeschritten als mit dem hypoplastischen Modell. Nach $t = 2,5\text{ s}$ stellt sich bereits ein ähnlicher Hauptspannungsverlauf mit beiden Stoffmodellen ein.

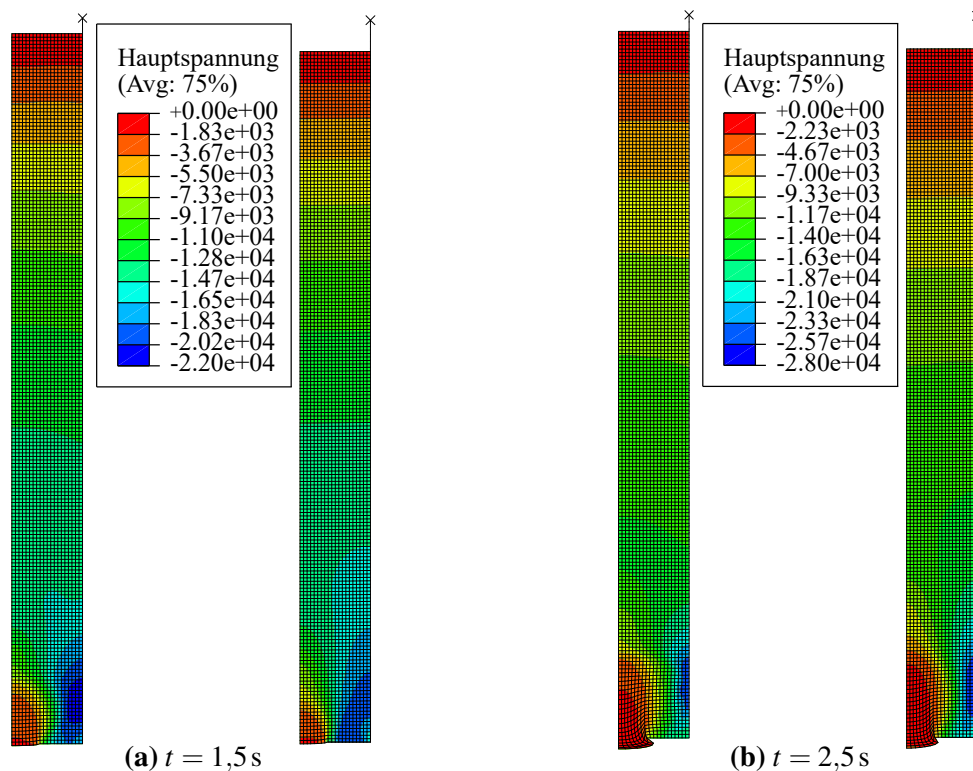


Abb. 4.18: Entwicklung der Hauptspannung [Pa]: Gegenüberstellung beider Stoffmodelle zum Zeitpunkt $t = 1,5\text{ s}$ und $t = 2,5\text{ s}$, links: Drucker-Prager, rechts: Hypoplastizität

Das Spannungsgewölbe im Öffnungsbereich suggeriert, dass in diesem Bereich eine Auflockerungszone entsteht. Im hypoplastischen Stoffmodell wird die Porenzahl zur Charakterisierung der Stoffeigenschaften verwendet. Die folgende Darstellung der Porenzahl (Abbildung 4.19) macht aufgelockerte und verdichtete Bereiche sichtbar. Bei der Scherverformung vergrößert sich das Volumen des Schüttgutes und damit auch die Porenzahl, mit der letztendlich die Scherzonen lokalisiert werden können.

4 Numerische Simulation

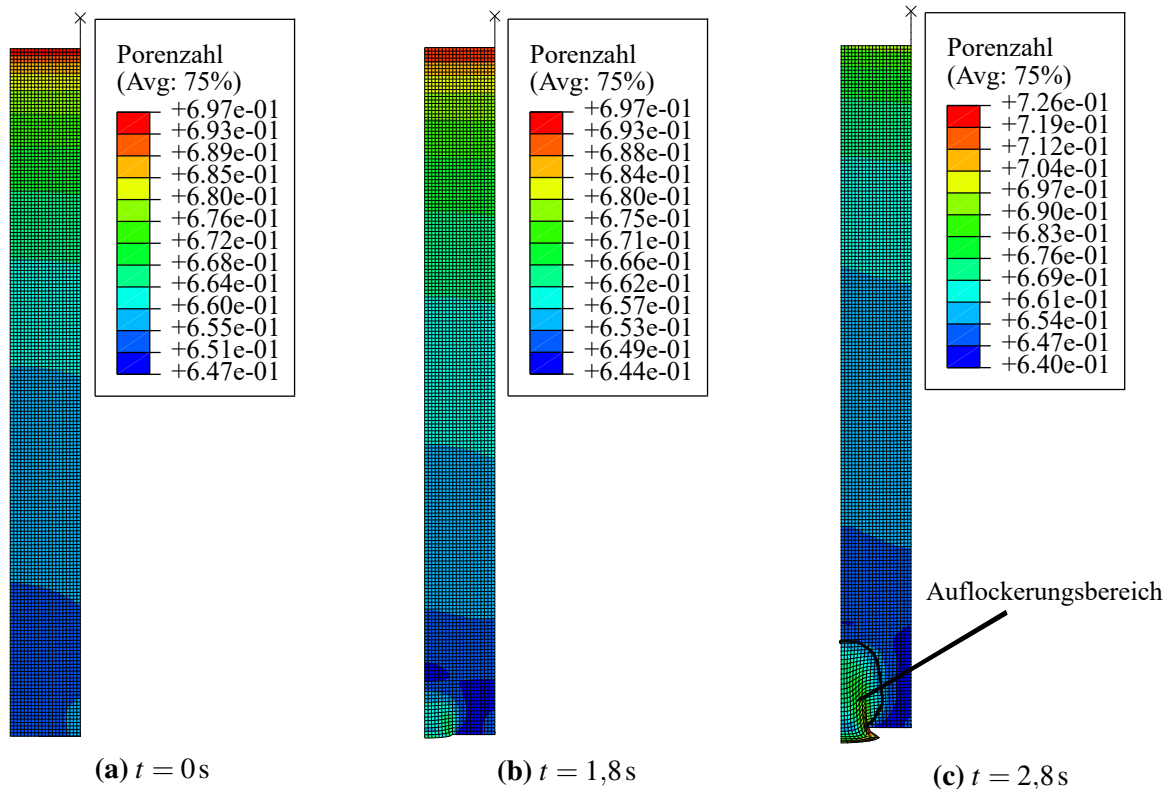


Abb. 4.19: Entwicklung der Porenzahl im Schüttgut beim Entleeren mit dem hypoplastischen Stoffmodell für unterschiedliche Zeitpunkte

Im Allgemeinen wird das Verhalten des Schüttgutes im Silo durch die Verwendung des hypoplastischen Stoffmodells genauer beschrieben. Besonders vorteilhaft ist die Ausgabe der Zustandsgrößen wie der Porenzahl und dem mobilisierten Reibungswinkel, mit denen das Fließverhalten im Silo im Detail studiert werden kann. Die breite Anwendung hat sich in der Praxis jedoch noch nicht durchgesetzt. Ein Grund dafür ist die Vielzahl von Parametern und die geringe Verfügbarkeit vorhandener Schüttgüter. In den normativen Regeln sind die Schüttgutparameter für eine Berechnung nach Mohr-Coulomb bzw. Drucker-Prager angegeben. Im Allgemeinen werden die Parameter nach Mohr-Coulomb im Labor bestimmt. Die Stoffparameter nach dem hypoplastischen Stoffgesetz können nur in sehr wenigen Laboren bestimmt werden, auch wenn die entsprechenden Versuche dazu relativ einfach sind.

Da ein praxistaugliches Ingenieurmodell entwickelt werden soll, gilt es für den Ingenieur gut abschätzbare Parameter und eine einfache Handhabbarkeit zu priorisieren. Für die späteren Parameterstudien sollte die Anzahl an Stoffparametern möglichst gering gehalten werden. Zudem liegt der mit dem Drucker-Prager Modell für den Entleerungszustand berechnete Wandruck auf der sicheren Seite, was für diese Arbeit von großer Bedeutung ist. Das elasto-plastische Stoffmodell hat sich nach Drucker-Prager aufgrund der überschaubaren Anzahl an Stoffparametern als das geeignetste Stoffmodell herausgestellt.

4.5 Interaktion zwischen dem Schüttgut und der Silowand

Die meisten numerischen Modelle gehen von starren Silowänden aus. Die Silowand wird mithilfe von nicht verformbaren Starrkörper-Elementen modelliert. Um einen möglichen Einfluss aus der Nachgiebigkeit der Silowand bzw. des Bodens zu untersuchen, führte KAMINSKI 1987 experimentelle Untersuchungen durch. Die Versuche ergaben, dass die Nachgiebigkeit der Wand- oder Bodenstützung keinen großen Einfluss auf den horizontalen Fülldruck hat. Bei einem nachgiebigen Boden stieg der horizontale Druck im unteren Bereich an. Das bestätigte FEISE 1996 mit seinen Experimenten an einem Massenflusssilo mit einem Trichterneigungswinkel von 10° . Laut seiner Untersuchung ist das Aufeinanderzubewegen von Silo und Austragorgan zu vermeiden. FEISE 1996 untersuchte numerisch den Spannungszustand am Ende des Füllvorgangs mit starrem und flexiblem Boden für Kalkstein und Sand. Eine deutliche Erhöhung der Wandnormalspannung ist nur bei Sand zu erkennen, da dieser wesentlich weniger kompressibel als der Kalkstein ist. Bei Kalkstein wird das Schüttgut bei kleiner Federsteifigkeit zwar horizontal gestaucht, was jedoch wegen der hohen Verdichtbarkeit keine nennenswerte Rolle spielt. Ein Übergang vom aktiven zum passiven Zustand hat somit nicht stattgefunden.

Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt auf Flachbodensilos. Dabei besteht die Bodenplatte meistens aus Beton. Die Nachgiebigkeit der Bodenplatte ist in der Regel zu vernachlässigen. Das in Kapitel 4.2.2 untersuchte Flachsilo mit dem identischen Schüttgut liegt den folgenden Untersuchungen zugrunde. Da Silos oft durch Festdächer abgedeckt oder durch Aussteifungsringe im oberen Bereich gegen globales Beulen ausgesteift werden, wird der obere Rand als gelenkig angenommen. Da eine nachgiebige Bodenplatte den horizontalen Wanddruck erhöhen kann und hier nur der Einfluss der Nachgiebigkeit des Schafts von Interesse ist, wird die Bodenplatte als Starrkörper angenommen. Wie Abbildung 4.20 zeigt, unterscheiden sich die Wanddrücke bei unterschiedlichen Schaftdicken kaum. Der Grund dafür liegt darin, dass die radiale Verformung einer zylindrischen Schale unter einem rotationssymmetrischem Umfangsdruck sehr gering ist. Bei diesem Silo beträgt die axiale Verformung unter einem konstanten Innendruck von 20 kPa lediglich 0,1 mm. Bei einer solch geringen Verformung tritt keine nennenswerte Spannungsumlagerung auf. Es leuchtet ein, dass der erhöhte rotationssymmetrische Horizontaldruck bei zentrischer Entleerung ebenfalls zu einer nur unwesentlichen Spannungsänderung führt. Bis jetzt wurde vermutet, dass die Interaktion zwischen dem Schüttgut und der Wand sehr günstig auf die Beanspruchung wirkt. Besonders nach dem Rotter-Modell ergibt sich eine große Verformung der Schale. An den Stellen, an denen ein großer horizontaler Druck anzusetzen ist, biegt sich die Schale nach außen. Aufgrund dessen findet eine Spannungsumlagerung statt, die zu einer gewissen Kompensation der Lasten führt. Zeitgleich verformt sich

4 Numerische Simulation

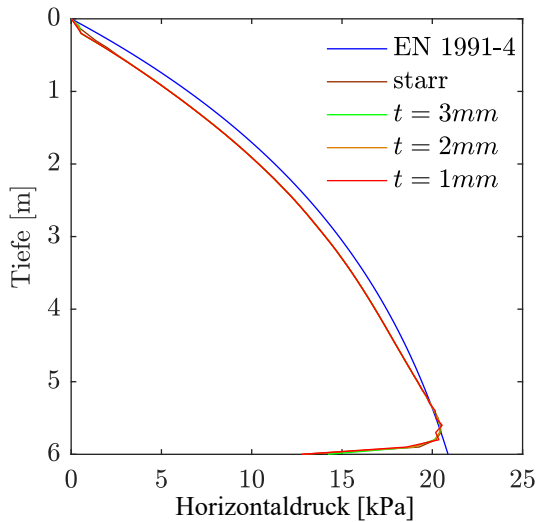


Abb. 4.20: Horizontaler Druck bei unterschiedlichen Wanddicken

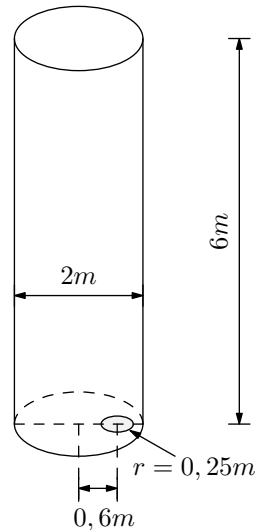


Abb. 4.21: Geometrie des Silos mit exzentrischem Auslauf

die Schale im Fließkanal nach innen, wodurch sich der horizontale Druck erhöht. Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Einfluss der Wandsteifigkeit infolge unsymmetrischer Lasten bei dünnwandigen Silos liegen bisher nicht vor. Es leuchtet zwar ein, dass sich die Belastungssituation mit einer verformenden Schale ändert, inwieweit die Verformung die Lastverteilung beeinflusst, ist jedoch noch unbekannt.

Im Folgenden wird der Einfluss der Nachgiebigkeit der Silowand auf den Wanddruck bei exzentrischer Entleerung untersucht. Abbildung 4.21 zeigt die Geometrie des untersuchten Silos. Die Exzentrizität der Auslauföffnung beträgt 0,6 m. Die Dicke der Silowand ist über die Höhe konstant und beträgt 1 mm. Das Silo wird über die Gleichung 4.1 volumengesteuert entleert. Über die Smooth-Step Funktion wird die maximale Geschwindigkeit unter Eigengewicht beim Zeitpunkt $t = 4$ s erreicht. Für die Silowand wird das von ABAQUS bereitgestellte S4R-Element mit vier Knoten und reduzierter Integration verwendet.

Bereits nach einer Entleerungszeit von $t = 8$ s stellt sich eine stabile Drucksituation in beiden Modellen ein. Abbildung 4.22 zeigt die Spannungsverteilungen im stationären Zustand bei einer Entleerungszeit von $t = 9$ s. Die beiden Verteilungen ähneln sich quantitativ und qualitativ sehr. Nahe der Auslauföffnung nimmt die Spannung im unteren Bereich zu und steigt ab einer bestimmten Höhe rapide an. In Abbildung 4.23 sind die horizontalen Drücke exemplarisch nach einer Entleerungszeit von $t = 2$ s, $t = 6$ s und $t = 8$ s in der Symmetrieebene abgebildet. Im Vergleich zu der Fülllast (Abbildung 4.20) ergibt sich ein Anstieg der Last auf der der Auslauföffnung gegenüberliegenden Seite. Bei $t = 8$ s bleibt das Maximum bei $h = 2$ m. Auf der Seite der Auslauföffnung wandert das Maximum nach oben und bleibt bei $h = 3$ m stabil. Im stationären Zustand unterscheiden sich lediglich die Maxima. Die Maxima mit starrer Wand sind nur geringfügig höher als die mit verformbarer Wand.

4.5 Interaktion zwischen dem Schüttgut und der Silowand

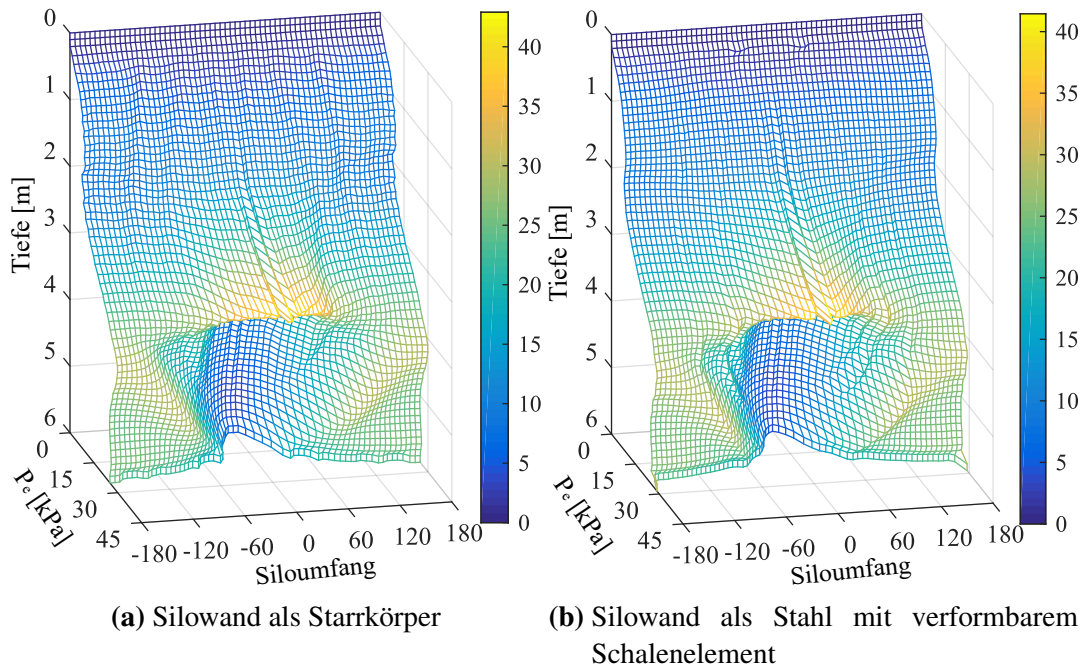


Abb. 4.22: Verteilung der abgewickelten Horizontaldrücke nach $t = 8$ s Entleerungszeit, bei 0 grad liegt die Auslaufseite

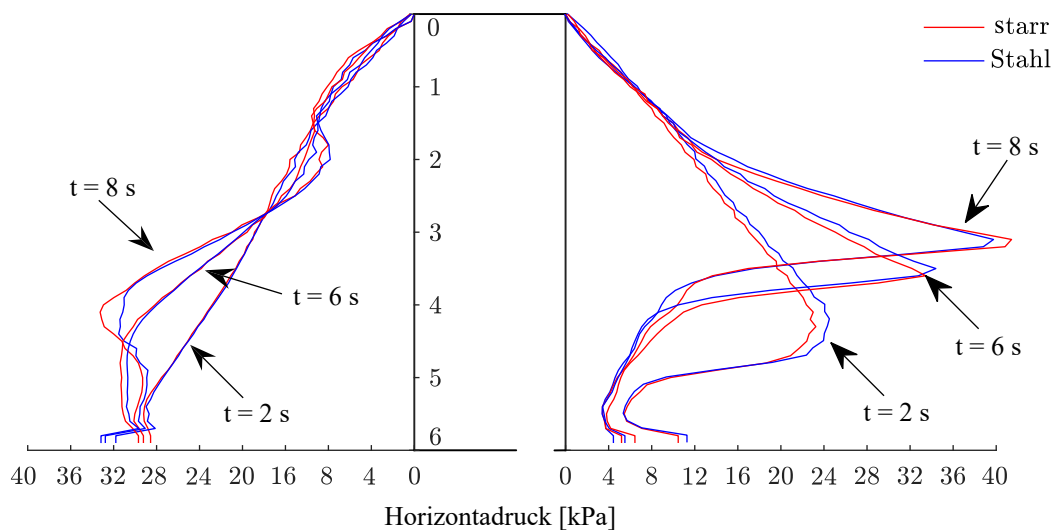


Abb. 4.23: Horizontaldrücke der Symmetrieebene über die Höhe; links: Winkel 180°, rechts: Winkel 0°.

In Abbildung 4.24 sind die Umfangsverteilungen der Horizontaldrücke in zwei verschiedenen Höhenlagen aufgetragen. Bei $h = 0,7$ m und $h = 2,7$ m ist die Ungleichmäßigkeit am deutlichsten zu erkennen. Im unteren Bereich wird der stationäre Zustand bereits nach einer Entleerungszeit von $t = 4$ s erreicht. Die Nachgiebigkeit der Wand macht sich kaum bemerkbar. Im oberen Bereich ist der Wanddruck aus der Simulation mit einer starren Wand wie erwartet höher als mit der verformbaren Wand. Bei 45°, wo die maximale Differenz auftritt, tritt auch die maximale radiale Verformung auf.

4 Numerische Simulation

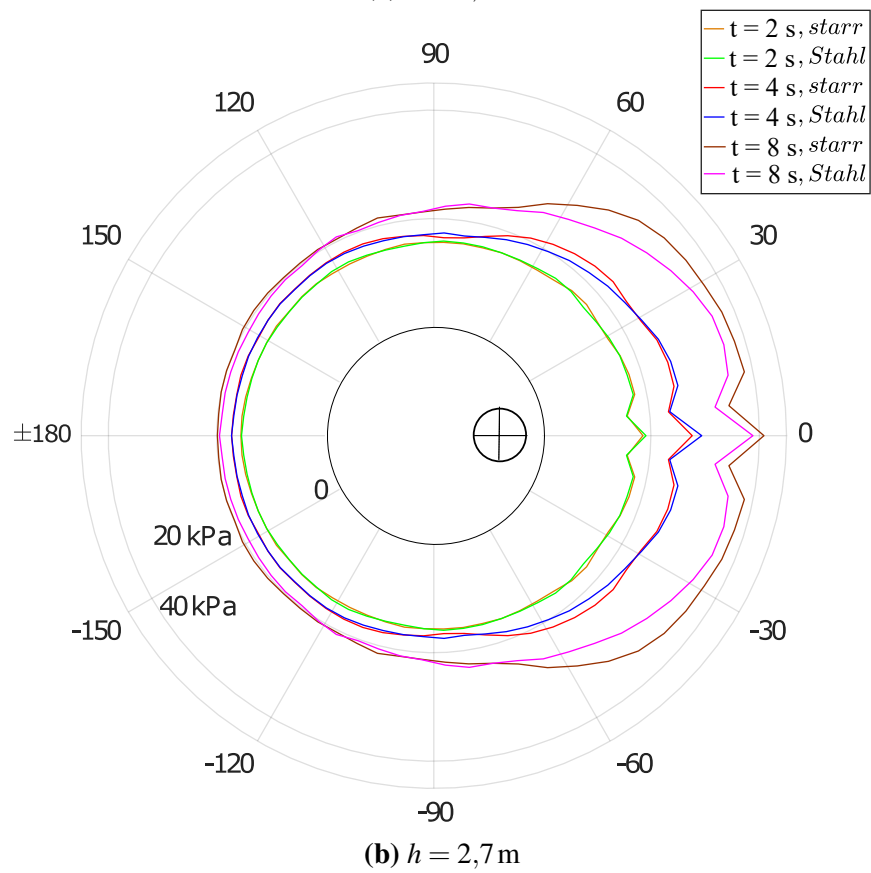
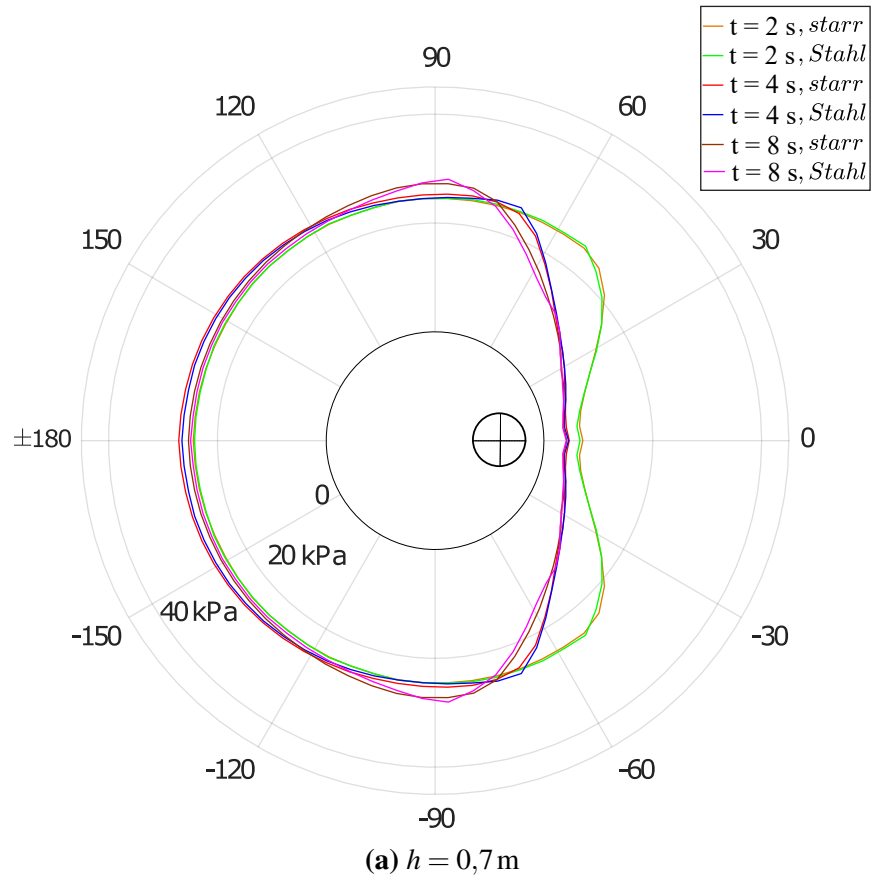


Abb. 4.24: Umfangsverteilung des Horizontaldrucks über Boden (h: Höhe über 0,0 m)

4.5 Interaktion zwischen dem Schüttgut und der Silowand

Aus Abbildung 4.25 kann man erkennen, dass sich die Schale in diesem Bereich (hellrot) nach außen verformt. Die maximale Verformung beträgt 1 mm. In der Mitte biegt sich die Schale zwar um 0,8 mm nach innen, was jedoch nicht günstig auf die Spannungsverteilung wirkt. Es ist zu vermuten, dass sich das Schüttgut im hellblauen Bereich schneller als im hellroten Bereich nach unten bewegt und aufgelockert ist. Hier ist zu erwarten, dass das Interagieren des fließenden Schüttgutes im Vergleich zu dem ruhenden Schüttgut nachlässt. Somit wird die Spannung nicht erkennbar größer. Insgesamt lassen sich, bezogen auf die Spannungsverteilung, keine erheblichen Abweichungen feststellen.

Einen wesentlich größeren Einfluss hat das Schüttgut auf das Stabilitätsverhalten. Die Silowand neigt besonders unter der Wandreibungslast zum axialen Beulen. Beim befüllten Silo werden außer der in Hinblick auf die Stabilität günstig wirkenden Ringzugkraft, die nach innen gerichteten Radialverformungen durch das Schüttgut behindert. Es agiert wie eine Bettung und bewirkt eine Erhöhung der Beullast. Experimentelle Untersuchungen von KNÖDEL 1995 und UMMENHOFER 1996 haben gezeigt, dass die Versagenslast eines befüllten Silos aufgrund des Vorhandenseins einer Bettung deutlich, im Vergleich zu einem leeren Silo, steigt. Im Laufe der Zeit wurden mehrere ingenieurmäßige Ansätze zur Beschreibung der Bettung entwickelt, die aber die Realität nicht wirklich abbilden können, da die Schüttgutsteifigkeit von zu vielen Faktoren abhängt und es nicht möglich ist, alle einzeln zu berücksichtigen. Außerdem wird bei der Berücksichtigung der Schüttgutsteifigkeit beim Füllen von einem gleichmäßig verteilten Innen-

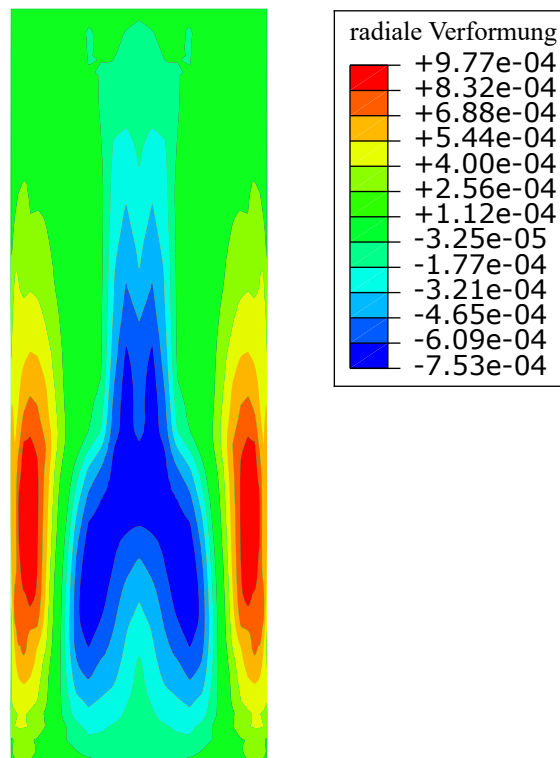


Abb. 4.25: Radiale Verformung der Wand beim Entleerungszeitpunkt $t = 9$ s [m].

druck ausgegangen, was nicht der Realität entspricht. Eine Übereinstimmung zwischen numerischen und experimentellen Ergebnissen konnte nicht verifiziert werden (UMMENHOFER 1996). WÓJCIK u. a. 2015 untersuchte numerisch das Stabilitätsverhalten eines mit Sand befüllten Silos. Dabei wurde das Versuchssilo von UMMENHOFER 1996 herangezogen. Beim perfekten Silo wurde die Traglast im befüllten Zustand gegenüber dem leeren Silo um 10% erhöht. Bei imperfekten Silos hängt der Anstieg stark von der Imperfektionsform und deren Amplitude ab. Insgesamt wird der Bettungseffekt unter Berücksichtigung der Imperfektion deutlicher. Dabei zeigten alle numerischen und experimentellen Untersuchungen ein gutartiges Nachbeulverhalten, d.h. der Abfall der Traglast ist nicht so stark ausgeprägt wie für das leere Silo.

In der Regel versagen Silos während des Entleerungsvorgangs. Beim Kernflusssilo ist zu erwarten, dass der Bettungseffekt bei der zentrischen Entleerung wie im Füllzustand wirkt, da das Schüttgut sich im Kontaktbereich nicht bewegt. Beim Massenflusssilo oder bei exzentrischer Entleerung stellt sich die Frage, inwieweit eine rechnerische Schüttgutsteifigkeit angesetzt werden kann. Eine Bewegung des Schüttgutes ist mit plastischen Verformungen verbunden. Eine stabile Stützung der Wand kann somit nicht mehr gewährleistet werden. KNEBEL u. a. 2000 ermittelte experimentell Beulwerte von Silos unter reinem Axialdruck und Axialdruck bei gleichzeitig wirkendem hydrostatischen Innendruck, Axialdruck mit ruhendem Schüttgut, Axialdruck mit stationär bewegtem Schüttgut bzw. instationär für drei unterschiedliche R/t -Verhältnisse. Die Ergebnisse zeigten, dass die Beulasten für ein fließendes Schüttgut gegenüber den Beulasten mit einem ruhenden Schüttgut deutlich abfallen. Aufgrund der geringen Versuchsanzahl und unzureichender Informationen bezüglich der Druckverteilung bzw. Bettungssteifigkeit und Imperfektion kann keine verallgemeinerte Aussage getroffen werden.

Es muss offen gesagt werden, dass es schwierig ist, die Steifigkeit hinsichtlich der Spannungsverteilung in die Norm einfließen zu lassen. Prinzipiell sollte die Beanspruchung unabhängig von der Konstruktionssteifigkeit sein. Die Bettungssteifigkeit hängt jedoch stark von den Schüttgutparametern und der Silogeometrie ab. Hinzu kommt die Imperfektionsform als entscheidender Faktor für die Traglast. Im Entleerungszustand ändern sich die Dichte- und die Spannungsverteilung ständig. All dies führt dazu, dass es unrealistisch und nicht lohnenswert ist, günstig wirkende Effekte bei der Bemessung durch einen für die Praxis anwendbaren Bemessungsansatz zu beschreiben.

5 Validierung der Füll- und Entleerungsberechnungen

5.1 Experimentalsilos

Zur Validierung der numerischen Simulationen ist ein experimenteller Versuch unerlässlich. In der Vergangenheit wurden viele Experimente durchgeführt, um unterschiedliche Phänomene zu studieren. In Deutschland wurden am Braunschweiger Siloprüfstand, sowie in Karlsruhe, viele Siloversuche durchgeführt. Leider stehen die Experimentalsilos nicht mehr zur Verfügung. Oft waren die Ergebnisse aufgrund einer mäßigen Herstellungsqualität nur begrenzt aussagekräftig. Das Anbringen von Druckmessdosen muss dabei besonders sorgfältig gehandhabt werden. Am Institut für Mechanische Verfahrenstechnik und am Institut für Stahlbau der TU Braunschweig stehen Experimentalsilos aus Plexiglas zur Verfügung, jedoch lassen sich Spannungsmessungen bzw. die Beobachtung eines Fließprofils kaum realisieren. Die Fließprofile während des Entleerens zu beobachten, erweist sich als mühsam und problematisch (J. F. CHEN u. a. 2007).

Im Department of Agricultural Engineering and Sciences (University of Leon) wurde ein Silo konstruiert, um Größe und Verlauf der Horizontal- und Wandreibungslasten über Höhe und Umfang des Silos bei zentrischer und exzentrischer Entleerung festzulegen. Das Silo besteht aus drei unabhängigen Segmenten, einem Dach, einem kreisrunden Schaft und einem Trichter (Abbildung 5.1). Der Trichter kann auch abmontiert und stattdessen ein Silo mit einem flachen Boden untersucht werden. Auslauföffnungen sind an drei unterschiedlichen Stellen angeordnet, um das Silo mit zentrischer oder exzentrischer Entleerung untersuchen zu können. Für die Untersuchung wird das Schüttgut Weichweizen (*Triticum aestivum*) verwendet (siehe Tabelle 5.1). Aufgrund der Abmessungen und der Schüttgutparameter liegt ein schlankes Silo ($h/d = 2$) mit einem steilen Trichter vor. Auf jeder Höhe sind vier Kraftsensoren angeordnet, um mögliche Exzentrizitäten zu untersuchen. Am oberen und unteren Rand wird die zylindrische Schale durch ein 50 mm breites und 10 mm dickes Stahlblech ausgesteift, sodass die Schale als Starrkörper betrachtet werden darf. Das Schüttgut fließt zuerst durch sein Eigengewicht in die Förderschnecke und wird dann mit Hilfe des Schneckenförderers entleert. Die Füll- und Entleerungsgeschwindigkeit werden über den Schneckenförderer gesteuert, der mit

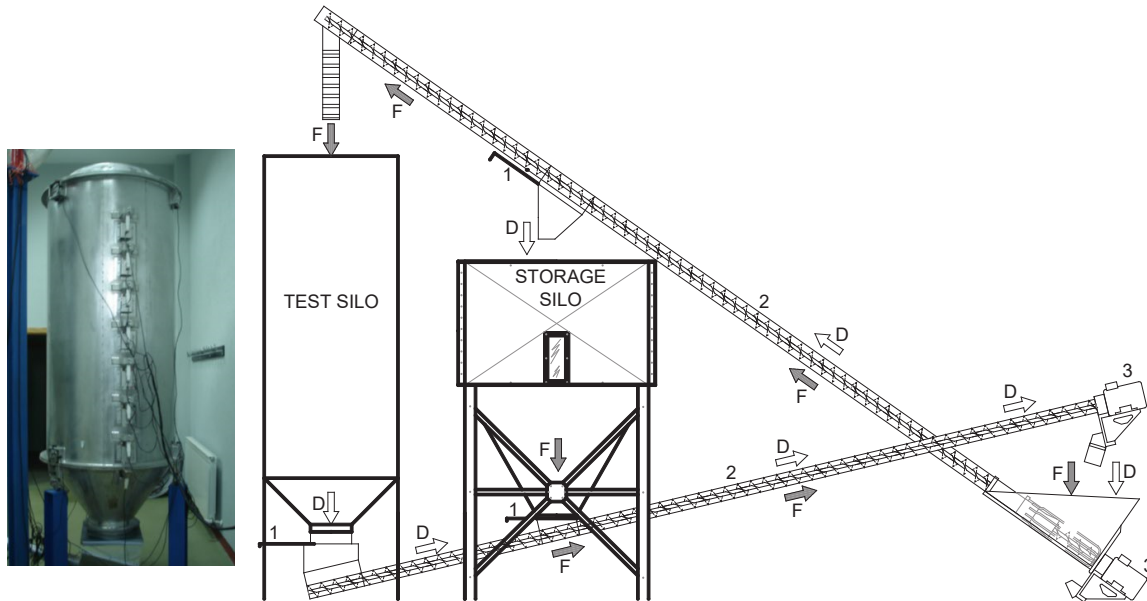


Abb. 5.1: Versuchseinrichtungen; 1: Absperrschieber; 2: Förderschnecke; 3: AC-Motor; F: Füllen; D: Entleeren (GALLEGO u. a. 2015b)

zwei A/C-Motoren verbunden ist. Ausführliche Konstruktionsdetails und Erläuterungen zu der Messtechnik sind in (COUTO u. a. 2012; RUIZ u. a. 2012) zu finden.

Der Versuchsaufbau und die Messtechnik sind auf dem neuesten Stand und die Messzellen wurden für die Versuche kalibriert. Aktuell liegen nur Versuchsergebnisse zentrischer Entleerungen vor. Die Versuchsergebnisse wurden sehr gut dokumentiert. Aufgrund dessen wird dieses Experimentalsilo als Referenz für die Validierung der numerischen Untersuchung herangezogen.

5.2 Numerische Simulation der Versuche

GALLEGO u. a. 2015b untersuchte mit dem oben beschriebenen Experimentalsilo die zentrische Entleerung mit dem Programm ANSYS, basierend auf der rein lagrangeschen Betrachtungsweise. Die verwendeten Parameter sind in Tabelle 5.1 aufgelistet. Dabei wurde für die Poissonzahl zwischen dem Füllzustand und dem Entleerungszustand unterschieden. MOYA u. a. 2006 beobachtete beim Versuch unterschiedliche Horizontallastverhältnisse K . Die Poissonzahl wurde aus dem Verhältnis $K/(1+K)$ abgeleitet. Große Schwierigkeiten bereitet die Simulation des Entleerungsvorgangs. Im Füllprozess werden alle Knoten am unteren Rand festgehalten. Nach Beginn der Entleerung wird die Halterung an allen Knoten deaktiviert. Große Elementverzerrungen im Auslaufbereich führen zu einer sehr geringen Entleerungszeit. Eine etwas längere Simulationsdauer wird erreicht, indem die Auflagerkräfte im Öffnungsbereich im Laufe einer gewissen Zeitspanne zu Null reduziert werden. Trotz dieser Maßnahme wurde nur eine Entleerungszeit

von einer Sekunde erreicht und eine volumengesteuerte Entleerung kann nicht wiedergegeben werden.

Tab. 5.1: Schüttgutparameter für den Versuch (GALLEGO u. a. 2015b)

Wichte γ	8,39 kN/m ³
Elastizitätsmodul E	10,67 MPa
innerer Reibungswinkel ϕ_i	30,17°
Wandreibungskoeffizient μ	0,2
Dilatanzwinkel ψ	8,0°
Poissonzahl ν	0,25 – 0,42

Die numerische Simulation enthält wie das Experiment drei Phasen: Füllen, Lagern und Entleeren. Weil die Spannungen nach dem Befüllen nicht konstant bleiben, wurden zwei Tests mit unterschiedlicher Lagerzeit durchgeführt. Die Versuche zeigten, dass die Normalspannung im Trichter umso kleiner wird, je länger die Lagerzeit ist, weil das Material einen Spannungstoß während des Füllens erfährt, der durch eine längere Lagerzeit abgebaut werden kann. Der Effekt des Druckstoßes lässt sich jedoch durch ein langsames bzw. ein schichtweises Füllen verringern.

Da das schichtweise Füllen für den Trichter angewendet werden muss, wird das gesamte Schüttgut in 24 Schichten geteilt, um die numerische Oszillation zwischen den Schichten zu minimieren. Für das Aufbringen des Eigengewichts wird üblicherweise die Smooth-Step Funktion verwendet. Das Füllen jeder Schicht dauert 2 s, nach dem Füllen wird die jeweilige Schicht 1 s lang gelagert. Dabei wird ein so kleines Inkrement gewählt, dass die kinematische Energie verschwindend gering wird.

Das Silo wurde im Versuch innerhalb von 310 Sekunden über die Förderschnecke mit einer konstanten Geschwindigkeit entleert. Dies entspricht einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 0,059 m/s am Auslass. Die Modellierung erfolgt durch ein achsensymmetrisches Modell. Die Silowand wird als Starrkörper mit dem 2-Knoten Starrkörper-Element (RAX2) abgebildet. Das Schüttgut wird mit dem 4-Knoten antisymmetrischen Element (CAX4R) simuliert.

5.3 Füllzustand

Zur ersten Validierung der numerischen Simulation wurde der statische horizontale Wanddruck mit den gemessenen statischen Drücken verglichen. Zusätzlich zu den berechneten und gemessenen horizontalen Drücken wurde auch der Wanddruck nach DIN EN 1991-4 berechnet. Frühere experimentelle Untersuchungen haben bereits gezeigt, dass die Horizontallasten über

5 Validierung der Füll- und Entleerungsberechnungen

den Siloumfang trotz des zentrischen Befüllens ungleichmäßig verteilt sein können, da selbst ein unter Laborbedingungen zentrischer Füllvorgang zwangsläufig zu Inhomogenitäten führt. Da in dem Versuch drei Druckmesssensoren über den Umfang angeordnet sind, werden bei der Auswertung der Versuchsergebnisse die Horizontaldrücke der drei Messsensoren arithmetisch gemittelt.

Die Ergebnisse zeigen für den Schaft im Füllzustand eine sehr gute Übereinstimmung (Abbildung 5.2). Vor allem die Übereinstimmung der numerischen und experimentellen Ergebnisse macht deutlich, dass die Simulation den Wanddruck realitätsnah wiedergeben kann. Lediglich zu den Messwerten des Sensors GA0 ergeben sich große Abweichungen. Die Unstetigkeitsstelle am Übergang vom Schaft zum Trichter führt zu einer Spitzenspannung, die qualitativ bei allen Ergebnissen zu erkennen ist. Die Verhältnisse in diesem Bereich sind sehr komplex. Hier reagiert das Schüttgut besonders empfindlich gegenüber einer Störung aus den Druckmessdosen. Im Allgemeinen liegt für den Trichter noch kein endgültiger Ansatz zur Beschreibung der Spannungsverteilung vor. In dieser Arbeit wird nicht weiter auf die Ermittlung der Spannungen im Trichter eingegangen.

Wie im vorigen Kapitel gezeigt, nimmt die vertikale Spannung oberhalb des Übergangs ab. Die Janssen-Gleichung geht von der Annahme einer konstanten Vertikalspannung über den gesam-

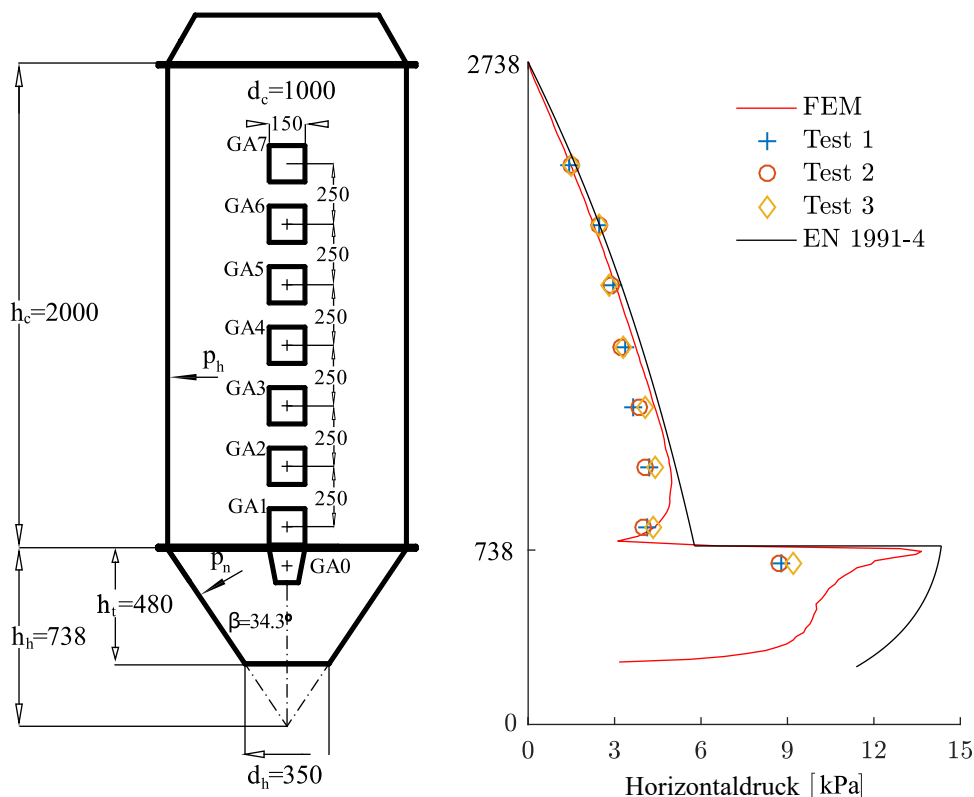


Abb. 5.2: Links: Geometrie des Versuchssilos und Positionen der Drucksensoren[mm], rechts: Horizontaldruck im Füllzustand

ten Querschnitt aus. In Abbildung 5.3 (a) sind die vertikalen Spannungen in der Symmetrieebene und am Rand aufgetragen. Die Spannungen nehmen mit der Tiefe zu und bleiben im unteren Bereich des Schafts konstant. In Abbildung 5.3 (b) ist zu erkennen, dass die Spannungen in den Höhenschnitten des oberen Bereichs fast konstant bleiben. Im unteren Bereich steigt die Spannung zuerst leicht an und nimmt dann rasch ab. Dies führt zu einer geringen Abnahme des horizontalen Drucks oberhalb des Trichters und weist auf eine Hauptspannungsänderung hin. Die leichte Abweichung zwischen den theoretischen und numerischen Ergebnissen liegt an dem auf der sicheren Seite liegenden Horizontallastverhältnis K .

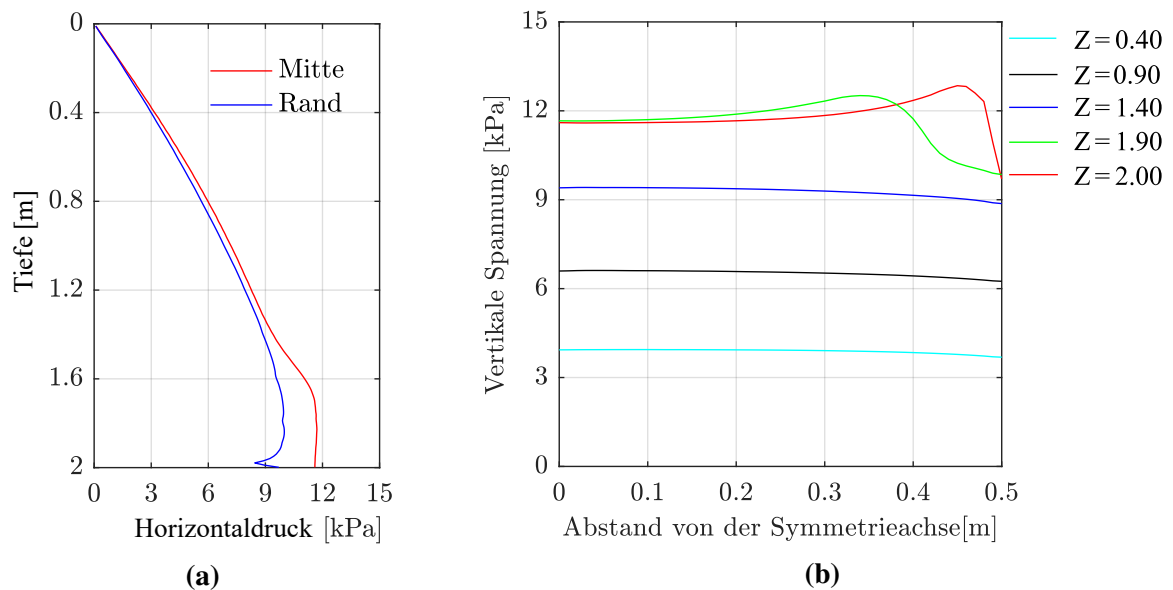


Abb. 5.3: Vertikale Drücke, (a) über die Höhe; (b) in unterschiedlichen Höhenschnitten

5.4 Entleerungszustand

Sobald das Silo entleert wird, erhöht sich der Horizontaldruck auf die Wand. GALLEGO u. a. 2015b vergleicht die numerischen Ergebnisse bei einer Entleerungszeit von $t = 1$ s, bevor die Berechnung abgebrochen wurde. Dabei wurde ein sägezahnförmiger Verlauf im Übergangsbereich zwischen dem Schaft und dem Trichter festgestellt. Abbildung 5.4 stellt die experimentell und numerisch ermittelten Ergebnisse gegenüber. Dabei handelt es sich um arithmetisch gemittelte Werte der ersten fünf Sekunden bei einem stationären Zustand. Zusätzlich wird der nach DIN EN 1991-4 berechnete Spannungsverlauf dargestellt.

Die Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den experimentellen und numerischen Werten. In DIN EN 1991-4 wird der horizontale Druck für den Entleerungszustand mit einem Vergrößerungsfaktor multipliziert, um dynamische Einflüsse zu berücksichtigen. Für

5 Validierung der Füll- und Entleerungsberechnungen

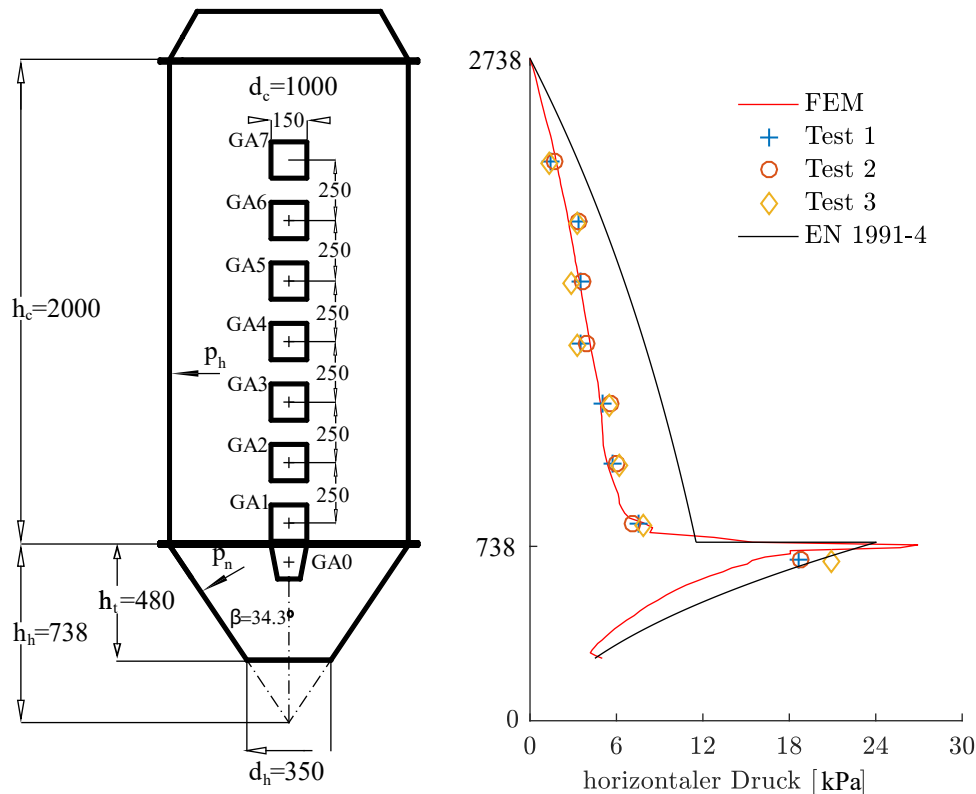


Abb. 5.4: Links: Geometrie des Versuchssilos und Positionen der Drucksensoren[mm], rechts: Horizontaldruck im Entleerungszustand

das untersuchte schlanke Silo der Anforderungsklasse 1 beträgt der Vergrößerungsfaktor 1,9. Aus Abbildung 5.4 ist zu erkennen, dass der horizontale Druck im Schaft deutlich überschätzt wird. Durch das Fließen wird das Schüttgut in vertikaler Richtung entlastet und zugleich in horizontaler Richtung komprimiert. Die größte Hauptspannung wirkt in horizontaler Richtung. Es herrscht, anderes als im Füllzustand, ein passiver Spannungszustand im Trichter. Dieser sogenannte „Switch“ führt zu einer Spannungsspitze im Übergangsbereich. Sowohl die berechneten als auch die gemessenen Spannungen verdoppeln sich. Um den Materialfluss bzw. das Fließprofil zu ermitteln, können mithilfe der ALE-Technik *tracer particles* an bestimmten Materialpunkten angeordnet werden. Zur Darstellung des Materialflusses kann zusätzlich der Verlauf der Kornlinien im Inneren des Silos angezeigt werden. Dafür werden die Verformungen der *tracer particles* für jedes Inkrement ausgewertet. Mithilfe dessen kann der Schüttgutfluss über die Entleerungszeit beobachtet werden. Zu erwähnen ist, dass die Berechnung der Pfade in der Nachlaufrechnung erfolgt und sehr rechenintensiv ist.

Beim Versuchssilo werden zehn horizontale Schichten in unterschiedlichen Höhen angeordnet. Im unteren Bereich erfolgt eine dichtere Verteilung. In Abbildung 5.5 ist das Fließprofil zu unterschiedlichen Zeitpunkten dargestellt. Dabei wird noch einmal besonders deutlich, dass sich das Schüttgut im Schaft gleichmäßig nach unten bewegt und es sich somit um ein Massenflusssilo handelt. Des Weiteren ist zu erkennen, dass das Schüttgut in der Mitte erwartungsgemäß

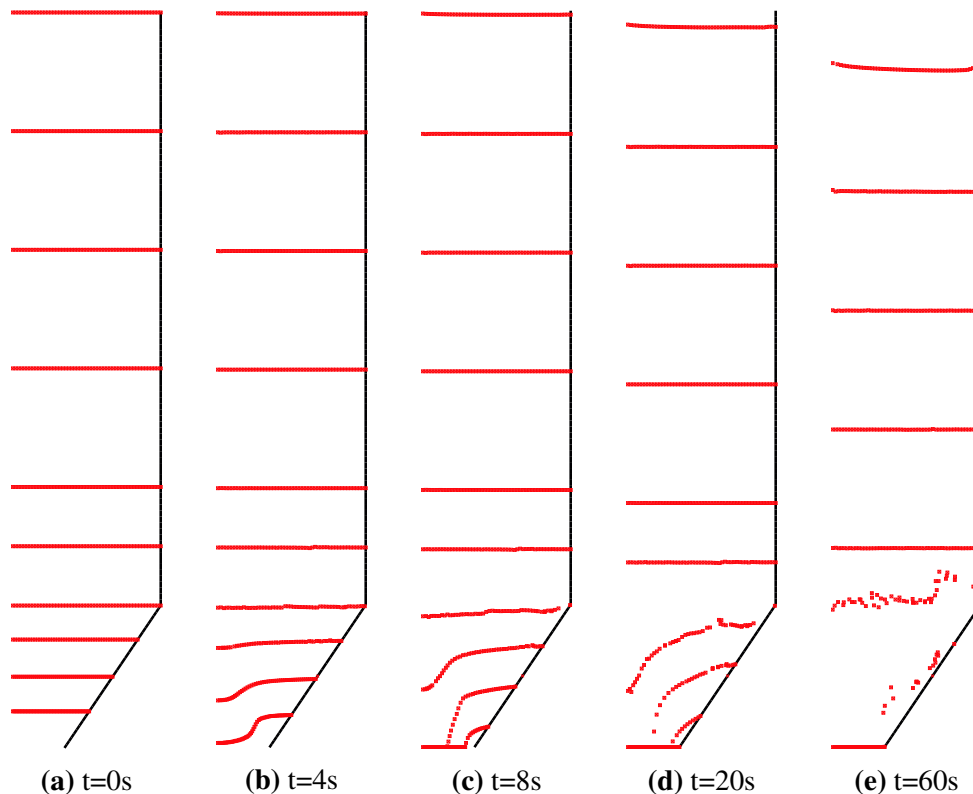


Abb. 5.5: Materialfluss zu verschiedenen Zeitpunkten mit Hilfe von *tracer particles*

schneller ausfließt als am Rand. Dies lässt sich zwar experimentell nicht beweisen, da eine Beobachtung des Fließprofils versuchstechnisch nur durch Einfärben der Partikeln für ein ebenes System möglich ist, entspricht jedoch den ingenieurmäßigen Erwartungen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die numerische Simulation der Versuche die Messergebnisse wiedergeben kann. Das numerische Modell ist in der Lage, das Fließverhalten unter realistischen Randbedingungen zu simulieren. Dank der ALE-Technik kann eine lange Entleerungszeit erreicht und somit weitere dynamische Effekte wie z.B. das Silobrummen studiert werden. Für die weiteren Untersuchungen mit exzentrischer Auslauföffnung ist die Verwendung der *tracer particles* für die Bestimmung des Fließprofils von besonderem Interesse, da so die Korrelation zwischen dem Fließprofil und der Spannungsverteilung analysiert werden kann.

6 Exzentrische Entleerung und Diskussion

Wie aus Kapitel 2 hervorgeht, gibt der analytische Ansatz nach *Rotter* zur Beschreibung der Wanddruckverteilung die reale Druckverteilung nicht ausreichend wieder. Wegen der Komplexität des Fließverhaltens kann die Ermittlung der Verteilung nur numerisch erfolgen. In den vorherigen Untersuchungen wurde bereits festgestellt, dass sich die Nachgiebigkeit der Wand bei exzentrischer Entleerung geringfügig positiv auf die Druckverteilung auswirkt. Eine volumen-gesteuerte Entleerung beeinflusst die Größe des Wanddrucks nicht, führt aber zu einer stabileren Berechnung. Aus diesen Gründen wird die Wand als Starrkörper modelliert und der Auslauf-öffnung eine Geschwindigkeitsverteilung nach Gleichung 4.1 zugewiesen. Die ungleichförmige Wanddruckverteilung in Umfangsrichtung bei exzentrisch entleerten Silos lässt sich nur durch eine räumliche Simulation abbilden. Aufgrund der Symmetrie können die Berechnungen für eine Silohälfte durchgeführt und damit der Rechenaufwand reduziert werden.

Das Fließverhalten wird hauptsächlich von dem Füllmaterial bestimmt. DAHLHAUS 1995 untersuchte mit Hilfe der stochastischen Feldtheorie die Einflüsse unterschiedlicher Stoffparameter und zeigte, dass der innere Reibungswinkel ϕ_i die größte Streuung der Wanddrücke (im Vergleich zu der Anfangstangentensteifigkeit E_0 , dem Dilatanzwinkel des Anfangszustands β_0 und dem Dilatanzwinkel im Bruchzustand β_1) erzeugt. In der derzeit gültigen DIN EN 1991-4 sind lediglich die Wichte γ , der innere Reibungswinkel ϕ_i und der Wandreibungskoeffizient μ als Materialparameter für die Bestimmung der Druckverteilung erforderlich. Um eine möglichst geringe Anzahl an Parametern in das Ingenieurmodell einfließen zu lassen und die Druckverteilung dennoch realistisch abbilden zu können, werden die zu untersuchenden Parameter auf den inneren Reibungswinkel ϕ_i , den Wandreibungskoeffizienten μ und die Exzentrizität e_x beschränkt.

6.1 Silogeometrien und Eingangswerte

In Kapitel 4.5 wurden bereits Ergebnisse aus exzentrischer Entleerung dargestellt. Für die Bemessung von Silos sind die horizontalen Wandlasten von größter Bedeutung. Aus diesem Grund wird hauptsächlich auf den horizontalen Wanddruck eingegangen. Um das Fließverhalten und

den Zusammenhang zwischen dem Fließprofil und der Druckverteilung besser zu verstehen, werden außerdem der Spannungszustand sowie die plastische Vergleichsdehnung näher beobachtet. Da sich die Eigenschaften verschiedener Schüttgüter stark unterscheiden können, werden mit Weizen und Sand bewusst zwei sehr unterschiedliche Schüttgüter untersucht, deren Parameter und Wandreibungskoeffizienten sich sehr unterscheiden. Die Geometrie des Silos liegt der Abbildung 4.21 zugrunde. Da die Größe der Exzentrizität in der aktuellen Norm nicht direkt berücksichtigt wird, sobald sie größer ist als der kritische Wert $e_{0,cr} = 0,25 d_c$, wird der Radius der Auslauföffnung auf 0,15 verkleinert, um mehrere Variationen mit unterschiedlicher Exzentrizität untersuchen zu können. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich kreisförmige Auslauföffnungen untersucht. Die Parameter für Weizen sind Tabelle 2.2 zu entnehmen, für Sand werden folgende Parameter verwendet:

Tab. 6.1: Schüttgutparameter Sand (Y. WANG u. a. 2015a)

Wichte γ	14,2 kN/m ³
Elastizitätsmodul E	2,0 MPa
innerer Reibungswinkel ϕ_i	35°
DP innerer Reibungswinkel ϕ_{dp}	44°
Wandreibungskoeffizient μ	0,48
Dilatanzwinkel ψ	3,0°
Poissonzahl ν	0,31

Der Wandreibungskoeffizient 0,48 für Sand entspricht dem Normwert für den Wandtyp 2 (mäßige Reibung). Die Auslaufgeschwindigkeiten beider Silos entsprechen einer Absenkgeschwindigkeit von 0,01 m/s. Die maximale Geschwindigkeit am Auslass beträgt 0,48 m/s. In beiden Modellen sind einheitliche Randbedingungen vorgegeben. Wie üblich gliedert sich die Berechnung in drei Schritte. Zuerst wird das Schüttgut in das Silo innerhalb von 10 Sekunden eingebracht. Nach einer Lagerungszeit von 2 Sekunden wird das Silo entleert. Bei $t = 5$ s wird die vorgegebene maximale Auslaufgeschwindigkeit erreicht. Die Entleerungszeit beträgt 60 Sekunden. Für jede Berechnung wird eine Konvergenzstudie durchgeführt. Außerdem ist der Anteil der künstlichen Energie in der Energiebilanz im Vergleich zur gesamten Energie nur sehr gering, sodass das Problem mit *Hourglassing* wegen reduzierter Integration ausgeschlossen werden kann. In den Kapiteln 2.4.4 und 4.5 wurde bereits auf den horizontalen Druck eingegangen. Im Folgenden werden die Ergebnisse näher betrachtet.

6.1.1 Simulationsergebnisse: Weizen und Sand

Weizen:

Wie bereits erläutert sind die horizontalen Wanddrücke für die anschließende Auswertung von größter Bedeutung. Sie werden in den maßgebenden Horizontal- und Vertikalschnitten dargestellt. Es fand im Vorfeld eine sorgfältige Auswahl des jeweils maßgebenden Zeitschritts statt. In Abbildung 6.1 ist der Horizontaldruck räumlich dargestellt. Die Abbildung 6.2 und 6.3 zeigen die Drücke zu unterschiedlichen Entleerungszeitpunkten in drei vertikalen Schnitten und zwei Höhenlagen. Folgendes lässt sich feststellen:

1. Während der Entleerungsphase nehmen die Horizontaldrücke an der Auslaufseite über dem Boden rasch ab und es stellt sich schnell eine stabile Drucksituation ein. Es bildet sich ein Bereich kleiner Spannungen, welcher von einem räumlichen Gewölbe umgeben ist. Dieses Gewölbe macht sich durch die Auflagerkräfte in Form von erhöhten Lasten an der Auslaufseite bemerkbar.
2. Die Druckspitze wandert nach oben und bleibt nach einer Entleerungszeit von $t = 12\text{ s}$ stabil. Die Stelle der Druckmaxima liegt bei $h = 2,5\text{ m}$. Die Spannung steigt von $10,3\text{ kPa}$ auf $23,4\text{ kPa}$.
3. Die Horizontaldrücke in (b) nehmen im unteren Bereich zunächst zu. Es bildet sich eine tote Zone, weshalb der Verlauf unterhalb von $h = 0,7\text{ m}$ stabil bleibt. Von $0,7\text{ m}$ bis 3 m entsteht ein wellenförmiger Verlauf. Dieser Verlauf stimmt qualitativ sehr gut mit der von (FRESE 1979) gemessenen Druckverteilung überein. Der Flächeninhalt der Druckkurve entspricht ungefähr dem 1,35-fachen des Flächeninhalts der Fülllast.
4. Auf der Gegenseite erhöhen sich die Drücke wegen der Änderung der Hauptspannungsrichtung vom Boden aus bis zu einer Höhe von 3 m . Mit fortschreitender Entleerung vergrößert sich die plastische Zone. Die Bruchlinie in der Symmetrieebene im stationären Zustand kommt mit der gegenüber liegenden Wand bei $h = 1,6\text{ m}$ in Berührung, wo der maximale Druckwert liegt. Der größte Lasterhöhungsfaktor gegenüber der Füllkurve beträgt 70% .
5. Beide Abbildungen zeigen deutlich eine ungleichmäßige Druckverteilung aufgrund der Exzentrizität. Das Verhältnis zwischen dem maximalen und dem minimalen Druck beträgt ungefähr 6 kPa bei $h = 0,5\text{ m}$ und $0,5\text{ kPa}$ bei $h = 2,5\text{ m}$. Oberhalb des maximalen Drucks ist der Verlauf in Umfangsrichtung an der Auslaufseite unstetig. Dies kann zu lokalen Biegemomenten führen.

6 Exzentrische Entleerung und Diskussion

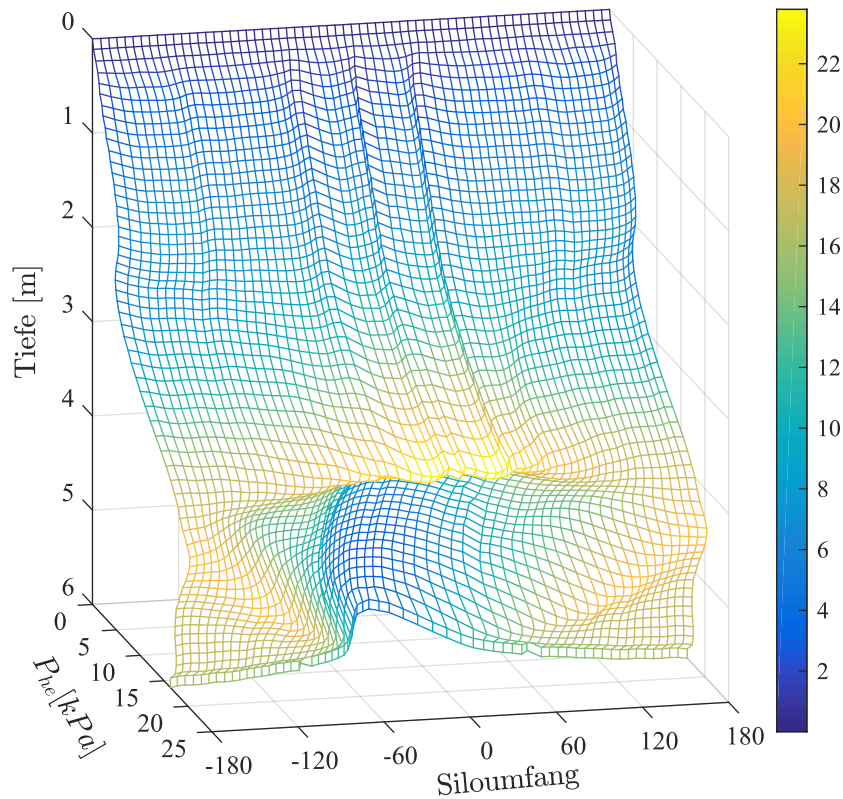


Abb. 6.1: Verteilung der Horizontaldrücke im stationären Zustand bei $t = 15$ s, Füllgut: Weizen

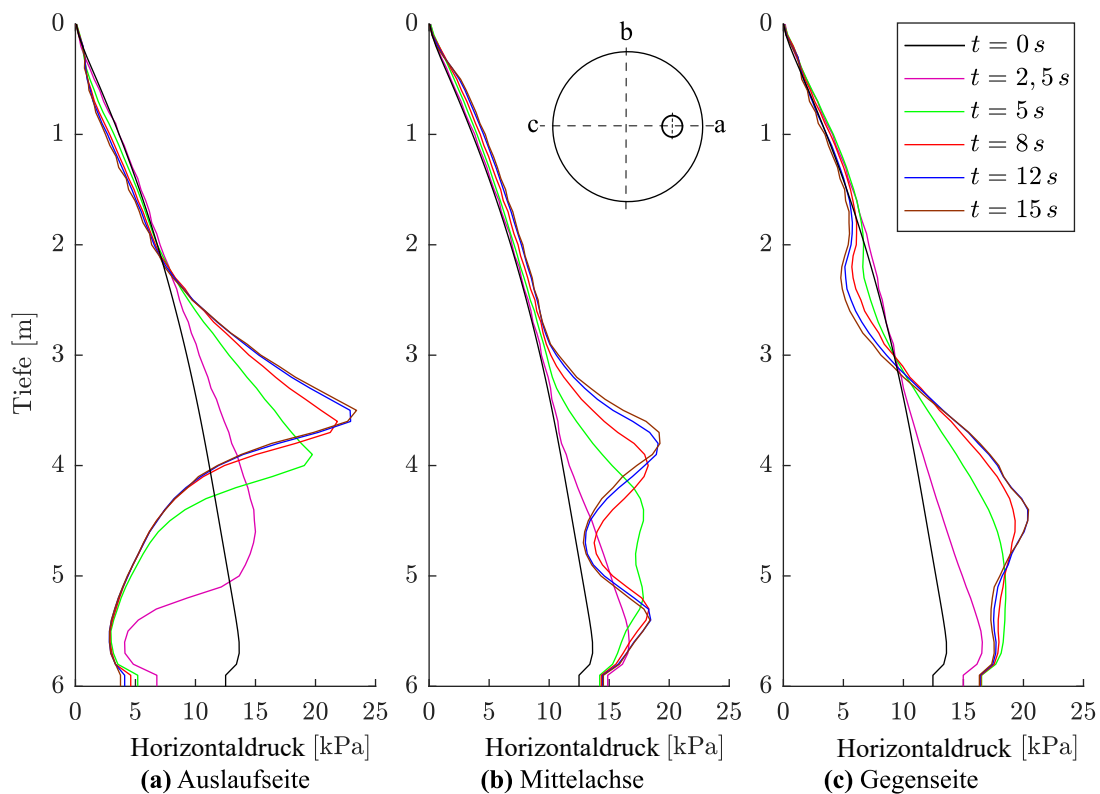
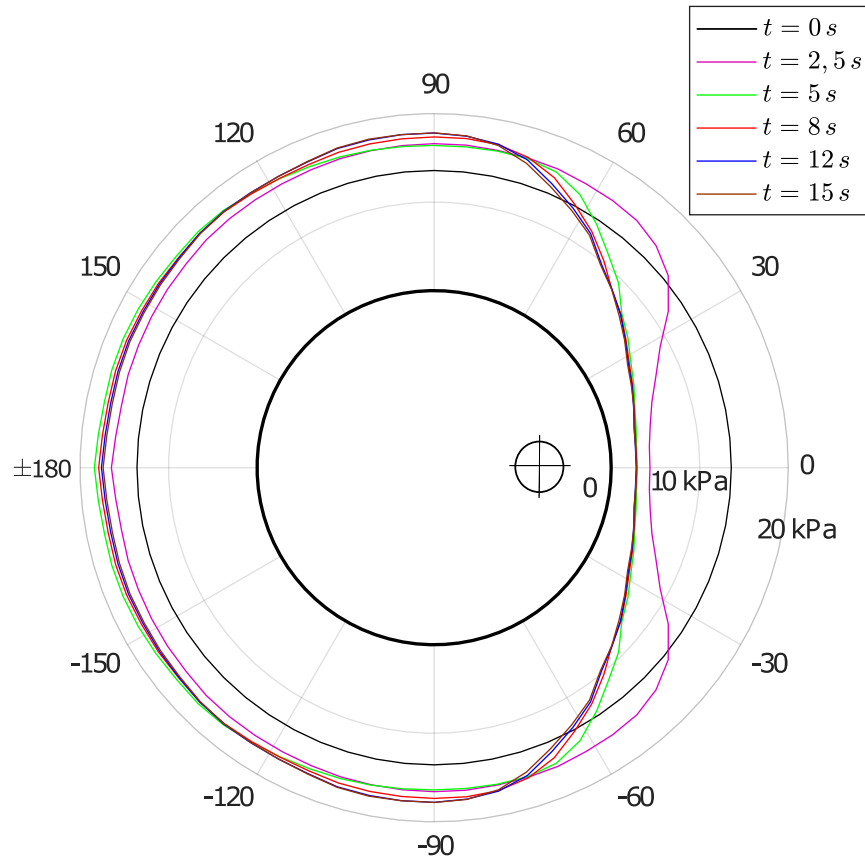
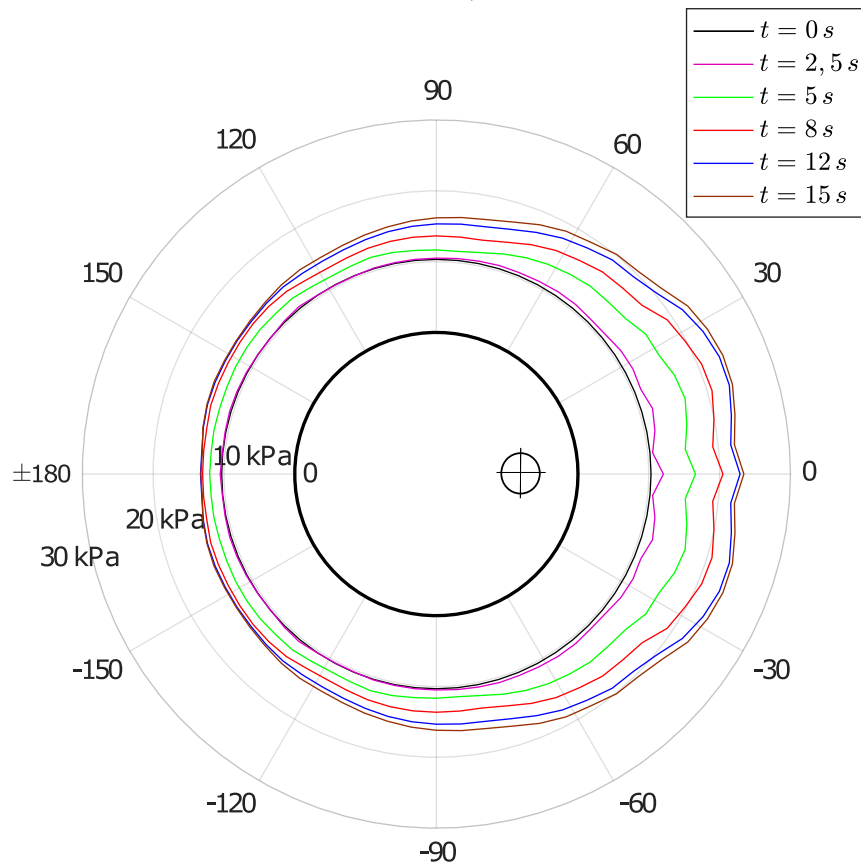


Abb. 6.2: Horizontale Drücke über die Höhe in verschiedenen Vertikalschnitten bei unterschiedlichen Entleerungszeiten, Füllgut: Weizen



(a) $h = 0,5\text{ m}$



(b) $h = 2,5\text{ m}$

Abb. 6.3: Umfangsverteilung des Horizontaldrucks über Boden, Füllgut: Weizen

Sand:

Sand ist gegenüber Weizen aufgrund des großen inneren Reibungswinkels und des hohen Wandreibungskoeffizienten weniger fließfähig. Dies zeigt sich in den Ergebnissen der numerischen Berechnung durch die sägezahnförmigen Verläufe. Erst nach ca. $t = 30\text{ s}$ stellt sich ein stationärer Zustand ein. In Abbildung 6.4 ist der Horizontaldruck räumlich dargestellt. In Abbildung 6.5 und 6.6 sind für drei vertikale Schnitte und zwei Höhenlagen die Drücke aus unterschiedlichen Entleerungszeitpunkten dargestellt. Im Vergleich zum Weizen sind folgende Merkmale prägend:

1. An der Auslaufseite wandert der Maximalwert aus dem räumlichen Gewölbe schneller nach oben und erreicht eine Höhe von 5 m. Es ist so keine ausgeprägte Spannungsspitze vorhanden.
2. An der Mittelachse bleibt der Wanddruck bis $h = 3\text{ m}$ konstant. Der Flächeninhalt der Druckkurve entspricht ungefähr dem 1,2-fachen des Flächeninhalts der Fülllast
3. An der Gegenseite erhöht sich der Wanddruck im unteren Bereich. Mit fortschreitendem Entleeren verläuft der Wanddruck analog zur Fülllast. Der Lasterhöhungsfaktor beträgt 1,17. Es ist kein Knickpunkt im Verlauf zu erkennen. Daraus kann abgeleitet werden, dass der Fließkanal die der Auslauföffnung gegenüberliegend Wand nicht berührt.
4. Wie beim Weizen sind ungleichmäßige Druckverteilungen festzustellen. Die Ungleichmäßigkeit ist jedoch weniger ausgeprägt. Aber die Verläufe im oberen Bereich sind unstetiger. Der Öffnungswinkel (Wendepunkt) ist deutlich kleiner.

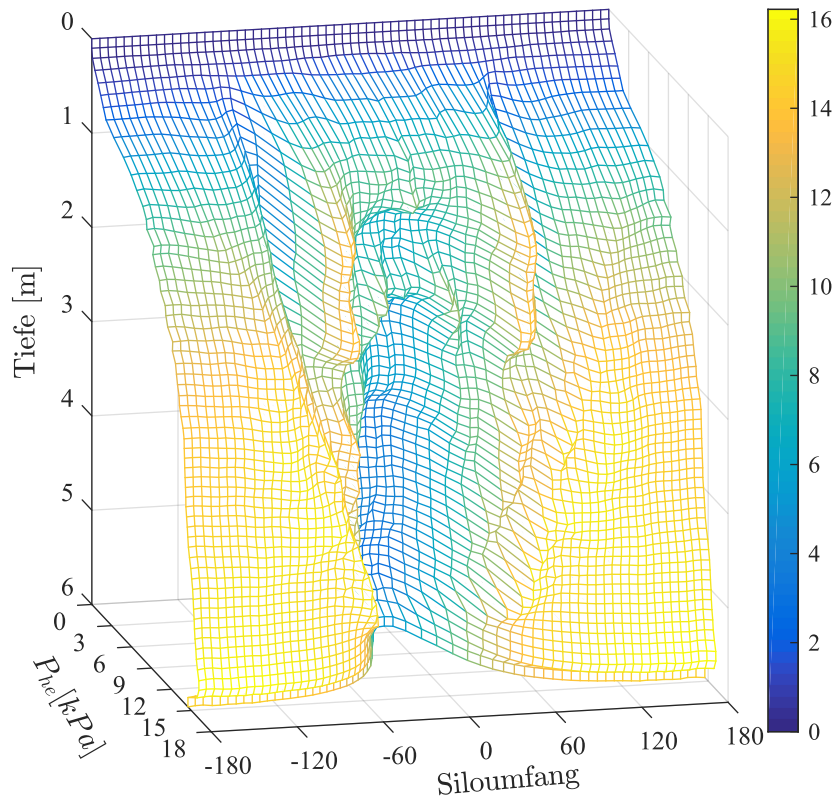


Abb. 6.4: Verteilung der Horizontaldrücke im stationären Zustand bei $t = 35$ s, Füllgut: Sand

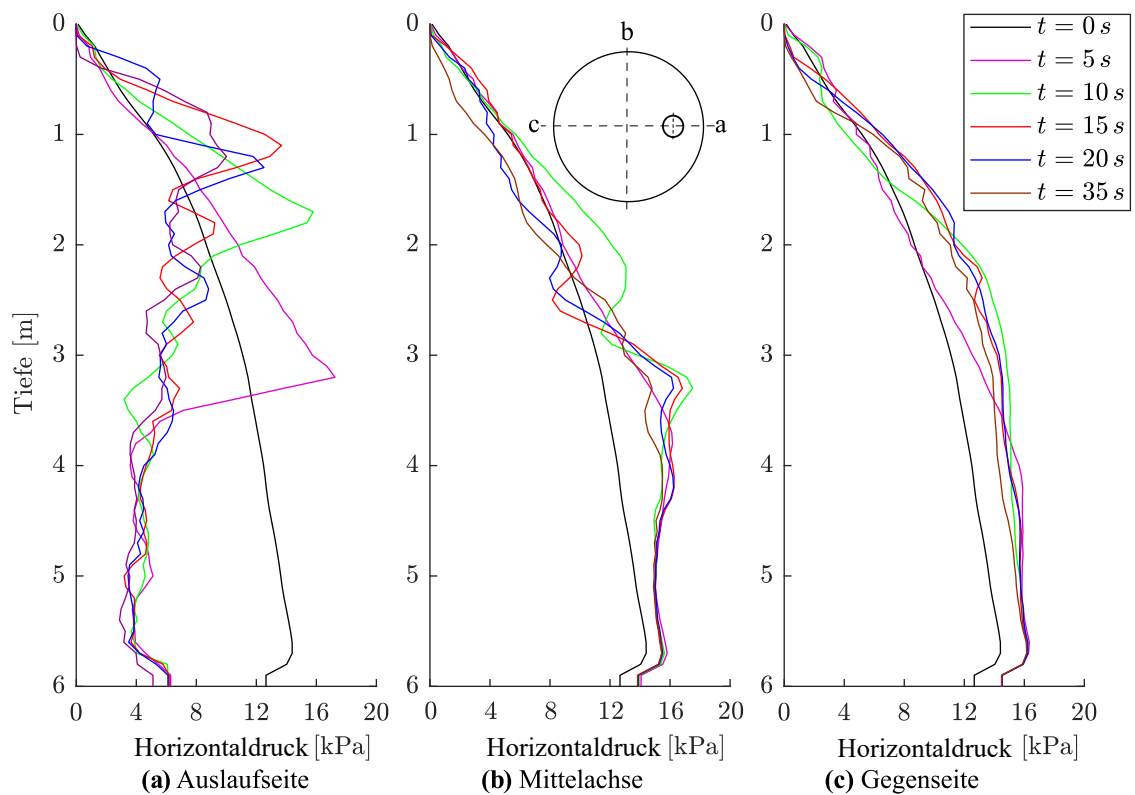
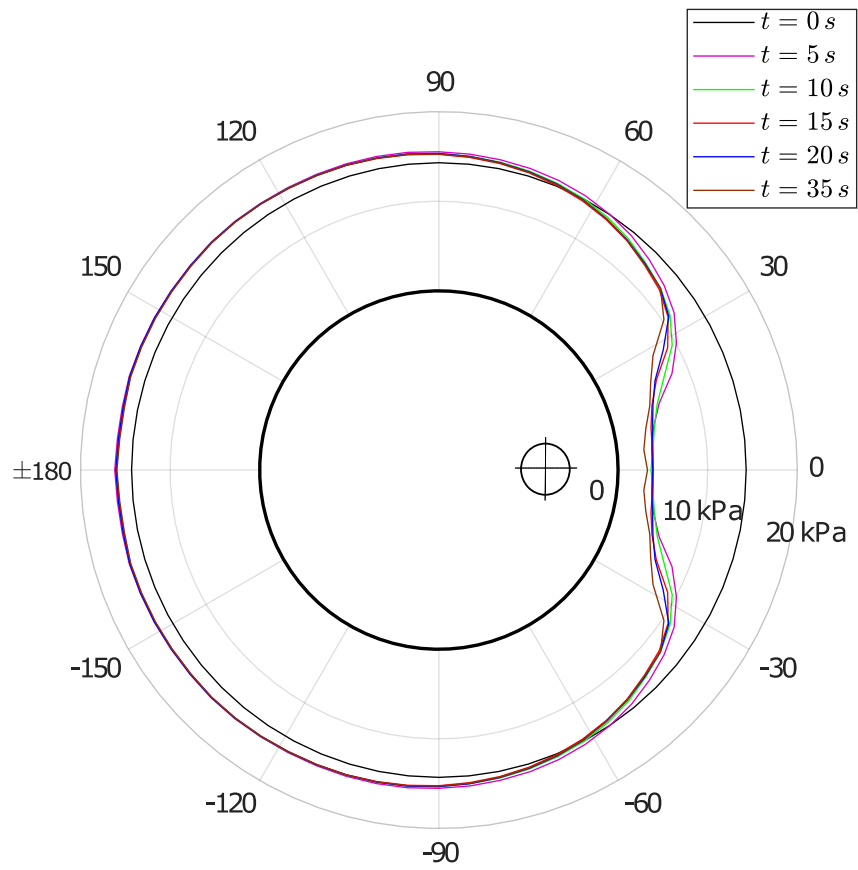
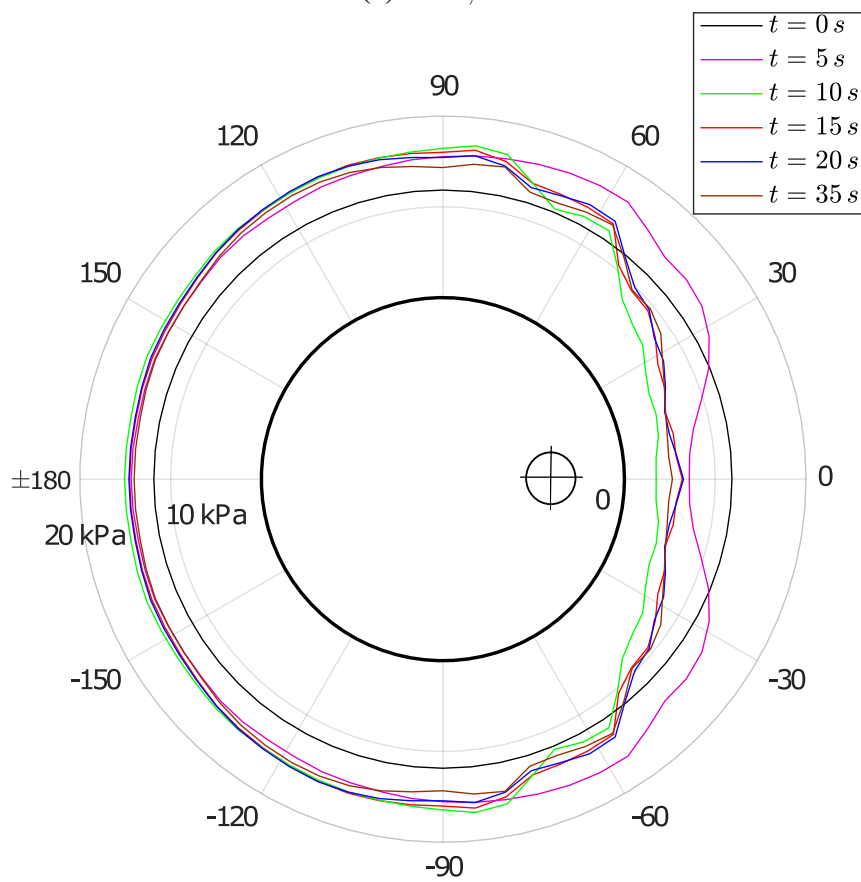


Abb. 6.5: Horizontale Drücke über die Höhe in verschiedenen Vertikalschnitten bei unterschiedlichen Entleerungszeiten, Füllgut: Sand



(a) $h = 0,5\text{ m}$



(b) $h = 2,5\text{ m}$

Abb. 6.6: Umfangsverteilung des Horizontaldrucks über Boden, Füllgut: Sand

Experimentelle Untersuchungen zum Fließkanal liegen bisher nur für ebene Systeme vor, da der innere Fließkanal nicht sichtbar ist. Für räumliche Systeme wird oft die Form des Fließkanals durch Einlegen gekennzeichnete Marken in bestimmten vertikalen und horizontalen Abständen ermittelt, indem die unterschiedlichen Auslaufzeiten dieser Marken gemessen werden. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse über ein mögliches Fließprofil sind jedoch fraglich, da nur die Zeit, nicht aber der Bewegungspfad erfasst wird.

Mit Hilfe der *tracer particles* ist eine Beobachtung des inneren Fließkanals möglich. In Abbildung 6.7 sind *tracer particles* in 12 Schichten alle 0,5 m angeordnet. Dabei wird noch einmal besonders deutlich, dass es sich beim Weizen, abgesehen von der toten Zone an der Gegenseite, um ein gemischtes Fließen handelt. Im oberen Bereich findet ein Massenfluss statt und im unteren Bereich bildet sich ein Schlotfluss aus, dessen Radius sich nach oben aufweitet. Bei dem mit Sand befüllten Silo bildet sich ein Fließkanal hingegen schneller aus und wächst bis zum Erreichen der Schüttgutoberfläche an. Dieser Fließkanal tangiert die Silowand nicht. Das Schüttgut an der Gegenseite bleibt nahezu komplett stehen. Es entsteht ein exzentrischer konvergenter Schlotfluss. Es sind zwei Ellipsoiden als Abflusstrichter zu sehen. Der äußere Trichter ist als Grenzlinie zwischen dem ruhenden und dem sich bewegenden Schüttgut zu verstehen. Der innere Trichter grenzt die Bereiche zwischen geringer und hoher Fließgeschwindigkeit ab. In DIN EN 1991-4 sind mögliche Fließprofile in den Bildern 3.2 und 3.3 dargestellt.

Des Weiteren ist zu erkennen, dass eine Spannungsumlagerung an der Auslaufseite in dem mit Sand befüllten Silo (Abbildung 6.5) nur im Anfangszustand stattfindet. Mit fortschreitendem Entleeren entsteht ein steiler Fließkanal an der Auslaufseite. Der Flächeninhalt der Druckkurve ist viel kleiner als der im Füllzustand. Diese Erkenntnis, dass der horizontale Druck an der Auslaufseite kleiner wird, steht zwar im Einklang mit dem Ansatz nach *Rotter*, allerdings nur für Schüttgüter mit großen Wandreibungskoeffizienten und inneren Reibungswinkeln.

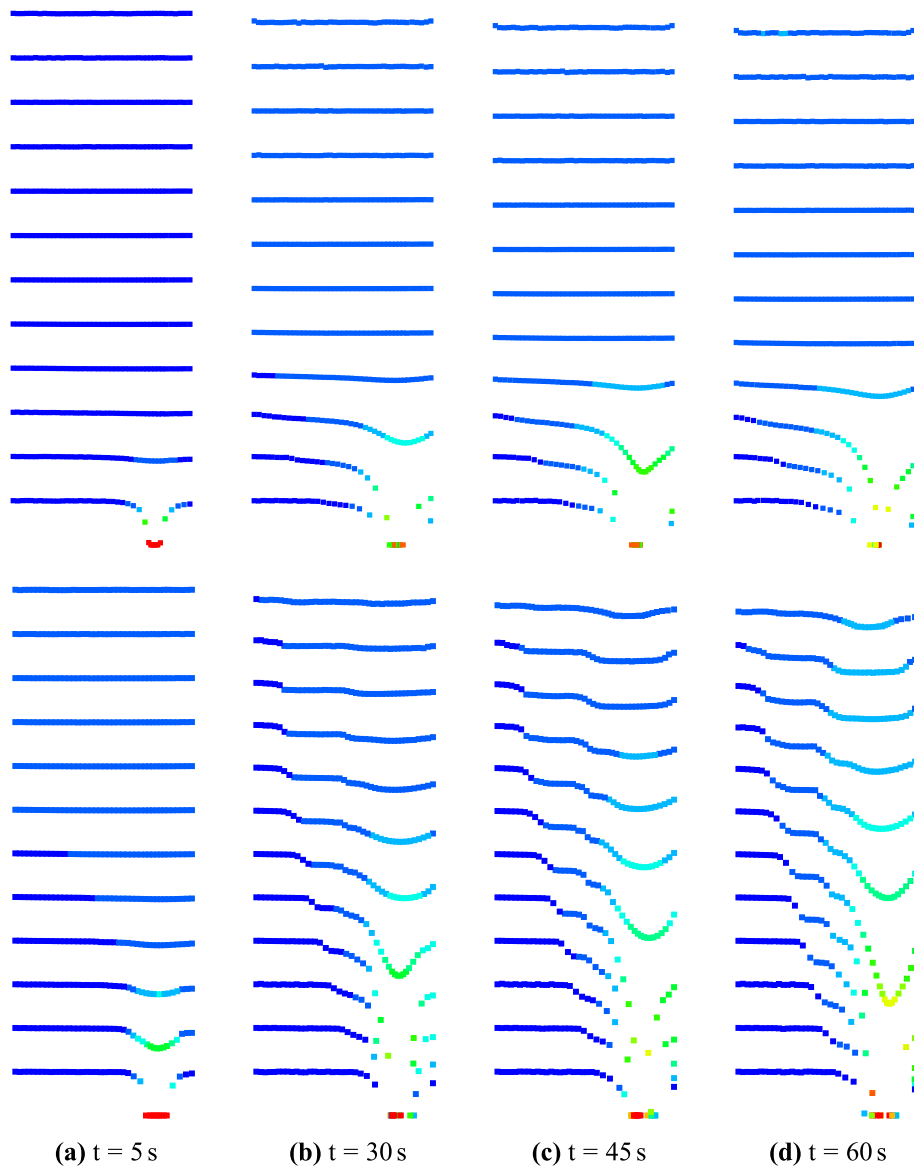


Abb. 6.7: Materialfluss in verschiedenen Höhenlagen während der Entleerung zu ausgewählten Zeitpunkten; oben: Weizen, unten: Sand

Vergleicht man das Ingenieurmodell nach *Rotter* mit den berechneten horizontalen Drücken, stellt man fest, dass die künstlich erzeugte Spannungsspitze P_{hae} nicht die Realität wiedergibt. Dieser überproportional erhöhte horizontale Druck ergibt sich aus dem Gleichgewichtsgrund der Herleitung.

Diese Annahme lässt sich jedoch nur rechtfertigen, wenn die resultierenden Wandreibungslasten in axialer Richtung wirken. Beim exzentrischen Entleeren ergibt sich außer der senkrecht verlaufenden Bewegung infolge der Schwerkraft noch eine horizontale Sekundärbewegung. Die resultierenden Wandreibungslasten verlaufen daher schräg zur Auslauföffnung (Abbildung 6.8). Im Entleerungszustand werden die höheren Fülldrücke entlang des Fließkanals durch die Wandreibungslast in horizontale Richtung geleitet. Ein horizontales Druckgewölbe mit Last-

spitzen unmittelbar neben dem Fließkanal bildet sich nur aus, wenn das Schüttgut keiner zusätzlichen, horizontalen Lageänderung unterworfen ist.

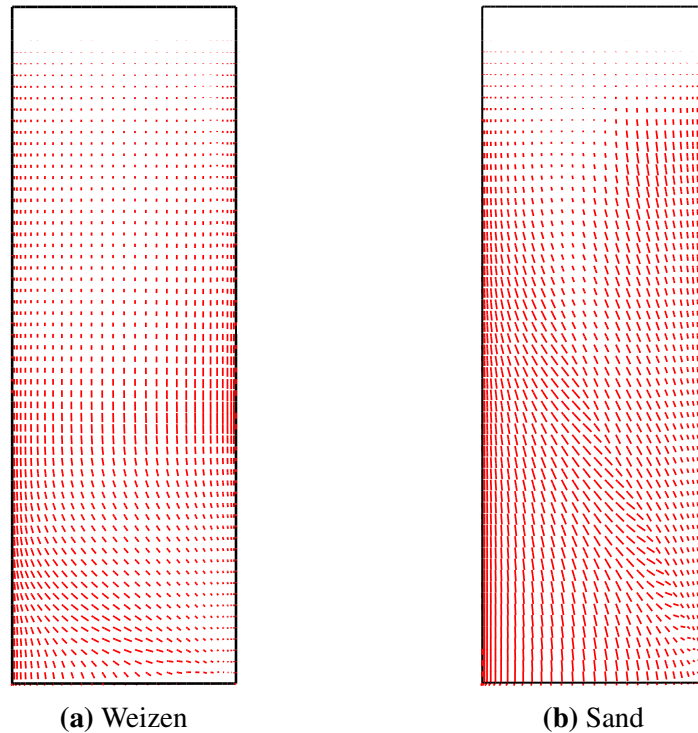


Abb. 6.8: Resultierende Wandreibungslasten nach einer Entleerungszeit von 60 s, Auslauföffnung an der rechten Seite

Durch eine Plausibilitätskontrolle wurde festgestellt, dass das Gleichgewicht im Gesamtsystem erfüllt ist. In der Norm sollte das horizontale Gleichgewicht durch einen Modifikationsbeiwert wiederhergestellt werden. Dies ist jedoch aufgrund der vorhandenen horizontalen Wandreibungslasten weder möglich noch nötig. Beim Weizen beträgt die resultierende Wandreibungslast in horizontaler Richtung 10,7 kN (7% des gesamten Eigengewichts) und beim Sand 21,4 kN (8% des gesamten Eigengewichts). In Anhang A.1 - A.4 sind die Umfangsverteilungen der horizontal wirkenden Wandreibungsdrücke dargestellt. Während der Wanddruck in horizontaler Richtung beim Weizen nur in den unteren zwei Metern vorhanden ist, macht sich der Anteil beim Sand deutlicher bemerkbar.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Spannungsverteilung mit dem Fließprofil korreliert, welches wiederum vom Schüttgut abhängig ist. Bei der zentrischen Entleerung wird die Entleerungslast für unterschiedliche Schüttgüter durch einen Vergrößerungsfaktor abgedeckt, da der horizontale Wanddruck in Umfangsrichtung gleichmäßig verteilt ist. Bei der exzentrischen Entleerung ist der horizontale Druck sowohl über die Höhe als auch in Umfangsrichtung stark über die Zeit veränderlich.

6.1.2 Einfluss der Exzentrizität

In dem aktuellen Ingenieurmodell geht die Exzentrizität nicht in die Entleerungsdrücke ein. Stattdessen müssen mindestens drei Fließkanalgrößen untersucht werden. Für die Teilflächenlast gehen die Schlankheit, die Exzentrizität und ein schüttgutspezifischer Kennwert in das Bemessungsmodell ein. Im Folgenden wird der Einfluss der Lage der Auslauföffnung untersucht. Als Referenzmodell wird das mit Weizen befüllte Silo gewählt. Variiert wird lediglich die Lage der Auslauföffnung, die jeweils nach links und rechts um 0,2 m verschoben wird. Die Exzentrizität e_0 beträgt demnach 0,4 m ($0,2 d_c$) und 0,8 m ($0,4 d_c$).

In Anhang A.5 und A.6 sind die Horizontaldrücke bei $e_x = 0,2 d_c$ und $e_x = 0,4 d_c$ räumlich dargestellt. Abbildung 6.9 zeigt die horizontalen Druckverteilungen für drei verschiedene Vertikalschnitte. Alle Druckverteilungen eines Vertikalschnitts zeigen die gleiche Tendenz. FRESE 1979 untersuchte exzentrisches und halbexzentrisches Entleeren und stellte fest, dass die Ergebnisse sich quantitativ nicht voneinander unterscheiden sondern der Spitzenwert mit zunehmender Exzentrizität nach oben wandert. Es leuchtet ein, dass die Horizontaldrücke an der Auslaufseite mit zunehmender Exzentrizität abnehmen. Abbildung 6.10 zeigt die plastische Vergleichsdehnung der Symmetrieebene für die drei Exzentrizitäten und verdeutlicht dabei, dass das Schüttgut an der Auslaufseite bei $e_0 = 0,4 d_c$ großen plastischen Verformungen unterworfen ist. Bei

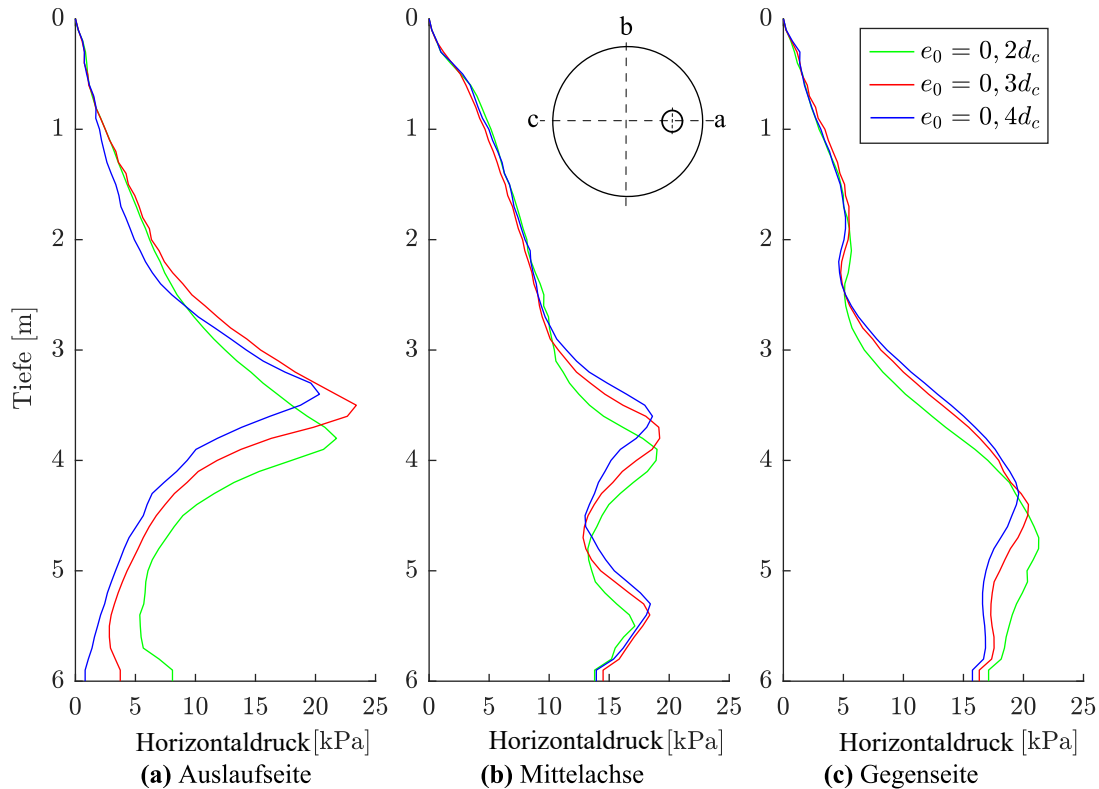


Abb. 6.9: Horizontale Drücke über die Höhe im stationären Zustand mit unterschiedlicher Exzentrizität beim Entleerungszeitpunkt $t = 15$ s, Füllgut: Weizen

$e_0 = 0,4 d_c$ beträgt der Wanddruck nur knapp 1 kPa. Dieser Bereich ist wegen der großen axialen Wandreibungslast und des zugleich niedrigen Drucks besonders stabilitätsgefährdet.

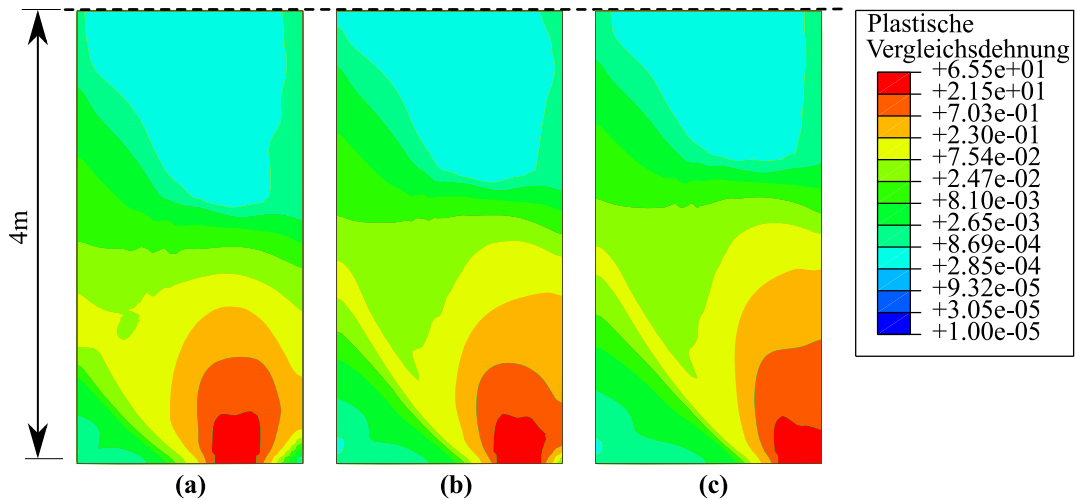


Abb. 6.10: Plastische Vergleichsdehnung im stationären Zustand, (a) $e_0 = 0,2 d_c$; (b) $e_0 = 0,3 d_c$; (c) $e_0 = 0,4 d_c$

Anhang A.7 zeigt die Umfangsverteilungen des Horizontaldrucks bei $h = 1,0\text{m}$ über Boden für die drei untersuchten Exzentrizitäten. Dabei zeigt sich erneut, dass die Ungleichmäßigkeit mit zunehmender Exzentrizität auffälliger wird. Ein wesentlicher Unterschied besteht noch darin, dass der Anteil der horizontal wirkenden Wandreibungsdrücke bei $e_0 = 0,4 d_c$ größer ist als bei $e_0 = 0,2 d_c$, da bei einer großen Exzentrizität ein größerer Teil des Schüttgutes zur Auslauföffnung fließt. In Abbildung 6.11 sind die Wandreibungsdrücke in Umfangsrichtung dargestellt. Der rote Bereich mit hohen Wandreibungsdrücken ist als Kontaktfläche zwischen der Wand und dem sich in horizontaler Richtung bewegendem Schüttgut zu verstehen. Daraus kann abgeleitet werden, dass der Fließkanal mit einer größeren Exzentrizität weiter nach oben aufgeweitet ist. Dies stimmt mit der aus der Abbildung 6.10 erworbenen Erkenntnis überein.

Nach DIN EN 1991-4 sollte bei Silos der Anforderungsklassen 2 und 3 der Lastfall mit großen Exzentrizitäten als ein separater Lastfall untersucht werden, wenn die Exzentrizität der Auslauföffnung e_0 größer ist als der kritische Wert $0,25 d_c$. Die Berechnung mit der Exzentrizität von $0,2 d_c$ hat jedoch gezeigt, dass die Wanddrücke sowohl quantitativ als auch qualitativ den Wanddrücken mit $0,3 d_c$ und $0,4 d_c$ ähneln. Die Berechnungen ergeben keine deutliche Abgrenzung in Bezug auf die Wanddrücke zwischen den untersuchten Exzentrizitäten. Ferner muss noch untersucht werden, ob das Konzept der Teilflächenlast (Kapitel 2.2.2) bei $e_0 \leq 0,25 d_c$ den Anteil aus der Exzentrizität ausreichend abdeckt, da die Teilflächenlast schließlich nur als Ersatzlast der realen Einwirkung zu betrachten ist, deren Auswirkung bei der Bemessung im Vergleich zu der tatsächlichen Belastung auf der sicheren Seite liegen sollte.

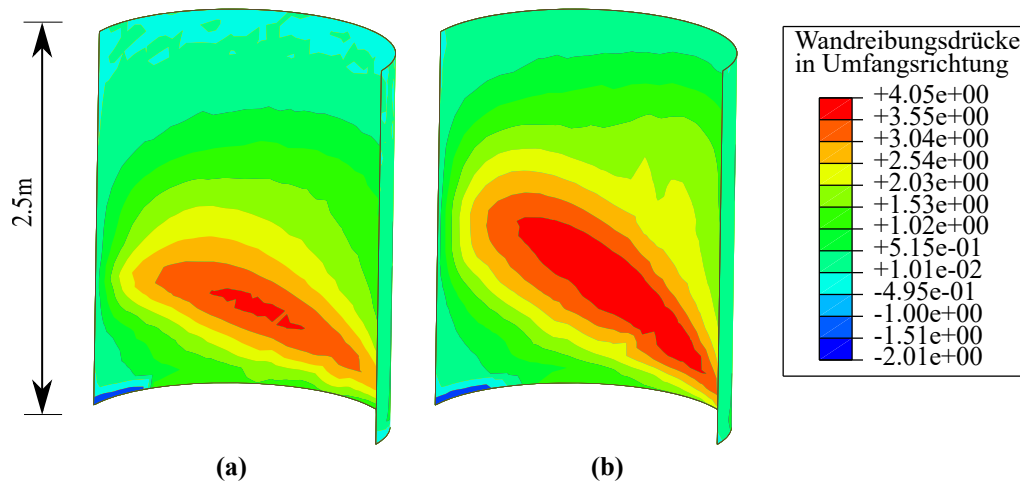


Abb. 6.11: Horizontal wirkende Wandreibungsdrücke in Umfangsrichtung: (a) $e_0 = 0,2 d_c$; (b) $e_0 = 0,4 d_c$

In Anhang A.8-A.9 sind die Horizontaldrücke bei $e_0 = 0,05 d_c$ und $e_0 = 0,1 d_c$ dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Ungleichmäßigkeit mit kleiner werdender Exzentrizität weniger ausgeprägt ist. Es muss hinterfragt werden, inwieweit eine genaue Abgrenzung zwischen „kleiner Exzentrizität“ und „großer Exzentrizität“ überhaupt sinnvoll ist.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das Fließverhalten und die Wanddrücke von der Exzentrizität beeinflusst werden. In der australischen Norm AS 3774-1996 werden auch die Wanddrücke für den Entleerungsvorgang im Wesentlichen durch die Exzentrizität beeinflusst (Abbildung 6.12). An der Auslauf- und der Gegenseite werden die Wanddrücke entsprechend reduziert bzw. erhöht. Auch für das Konzept der Teilflächenlast geht die Exzentrizität in das Berechnungsmodell ein. Die Lasten aus der Exzentrizität sind jedoch dazu eingebracht worden, um die zusätzlichen Biegebelastungen in dem Siloschaft zu berücksichtigen. Die Ergebnisse zeigen, dass nicht die Größe sondern die Stelle der maximalen Drücke von der Exzentrizität abhängt. Dies führt zu einem größeren globalen Biegemoment, welches größere Axialdruckspannungen in der Schale erzeugt. Es sollte zukünftig anhand numerischer Berechnungen die Auswirkung der Wanddrücke aus unterschiedlichen Exzentrizitäten untersucht werden.

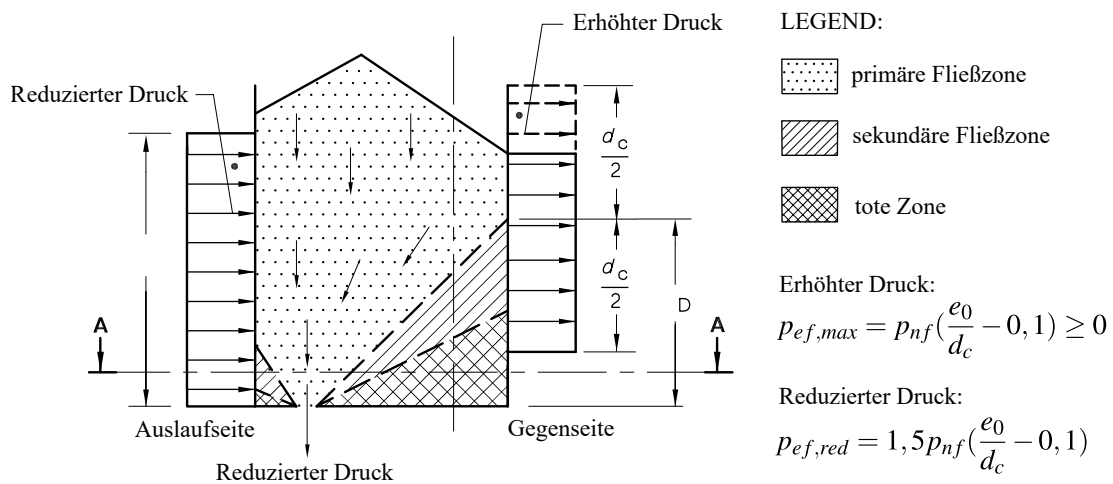
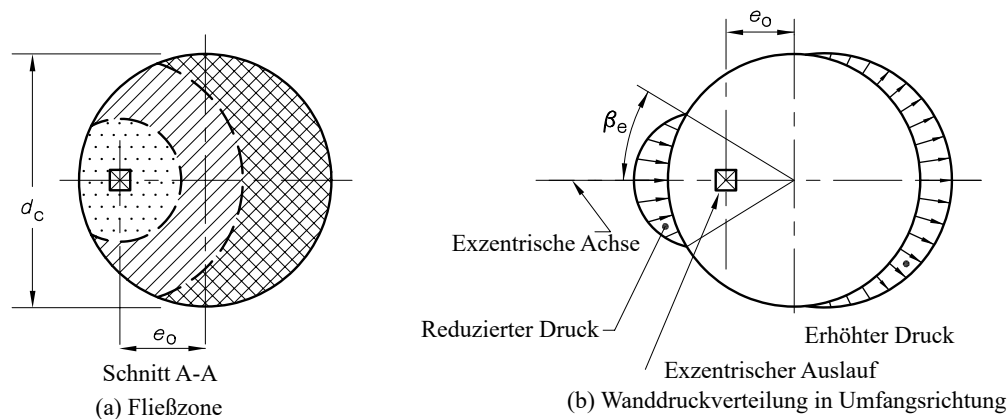


Abb. 6.12: Druckverteilung bei exzentrischer Entleerung (AS 3774 1996)

6.1.3 Einfluss der Schlankheit

Die für die Bemessung eines Silos heranzuziehenden Lasten hängen neben den Schüttguteigenschaften und der Exzentrizität auch von der Schlankheit ab. In DIN EN 1991-4 wird zwischen schlanken Silos ($h_c/d_c \geq 2$), Silos mit mittlerer Schlankheit ($h_c/d_c < 2$), niedrigen Silos ($0,4 < h_c/d_c \leq 1$) und Stützwandsilos ($h_c/d_c \leq 0,4$) unterschieden. Bei schlanken Silos werden die Lasten nur geringfügig vom Aufschüttkegel beeinflusst. Für gedrungene Silos sind die Silolasten nach den Ansätzen der Erddrucktheorie zutreffender.

Nachfolgend wird die Untersuchung auf schlanke Silos beschränkt. Die Exzentrizität bleibt bei $e_0 = 0,30 d_c$. Neben der Schlankheit 3 aus den vorherigen Berechnungen (Kapitel 6.1.1) werden die Schlankheiten 2 und 5 untersucht. In Anhang A.10-A.11 sind die Horizontaldrücke dargestellt. Die Abbildungen 6.13 und 6.14 zeigen die Horizontaldrücke in drei Vertikalschnitten: (a) Anströmmeridian, (b) Flankenmeridian, (c) Heckmeridian.

6 Exzentrische Entleerung und Diskussion

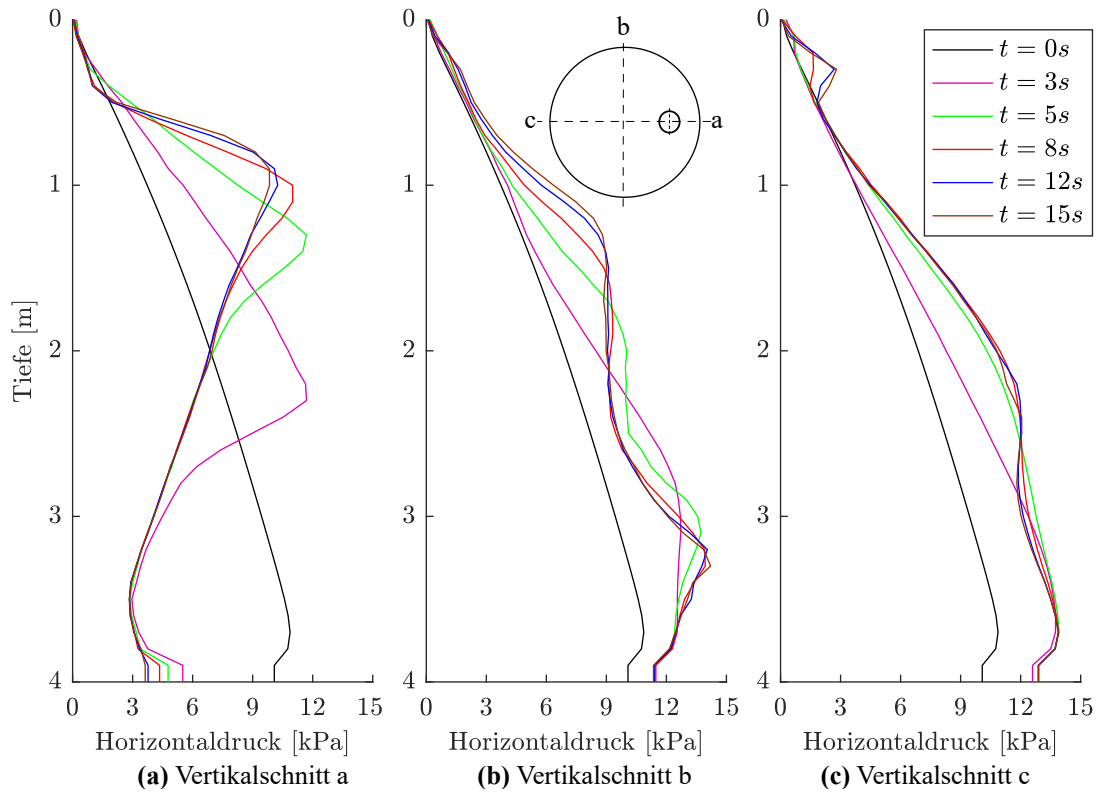


Abb. 6.13: Horizontale Drücke über die Höhe in verschiedenen Vertikalschnitten bei unterschiedlichen Entleerungszeiten, Füllgut: Weizen, $h_c/d_c = 2$

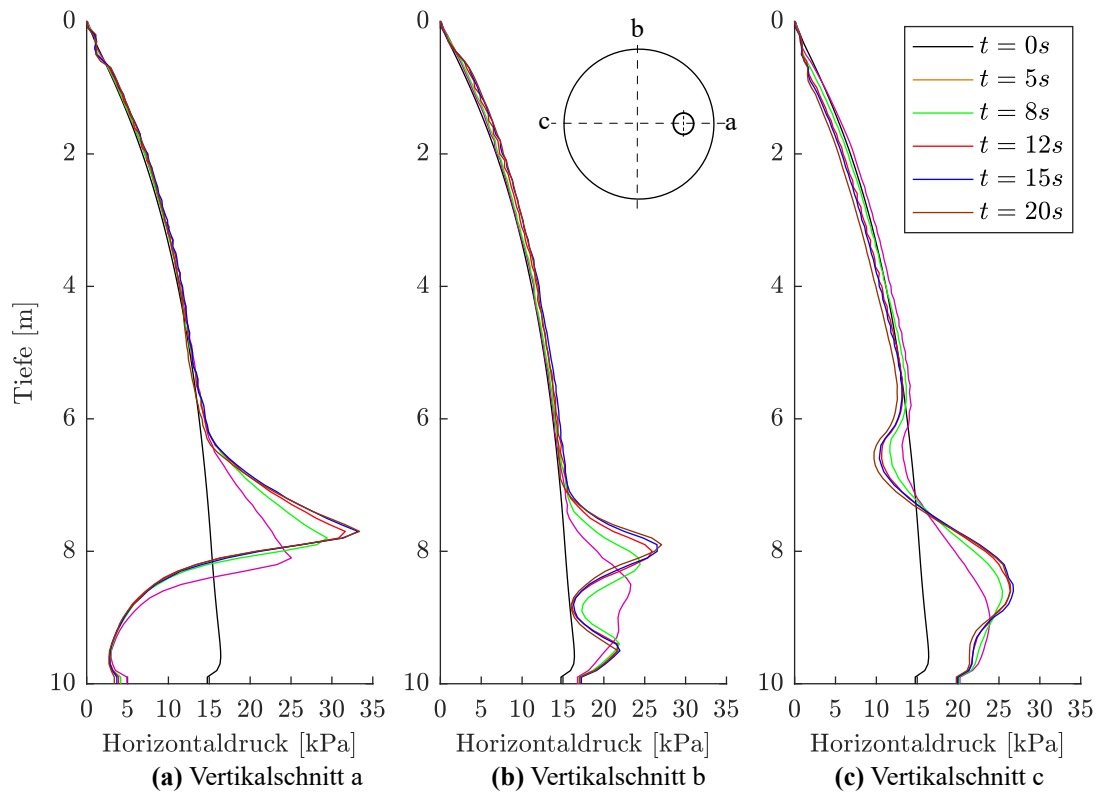


Abb. 6.14: Horizontale Drücke über die Höhe in verschiedenen Vertikalschnitten bei unterschiedlichen Entleerungszeiten, Füllgut: Weizen, $h_c/d_c = 5$

Durch den Vergleich der Lastbilder mit der Abbildung 6.2 kann festgestellt werden, dass die Lastbilder in den drei Vertikalschnitten qualitativ übereinstimmen. Bei kleinerer Schlankheit $h_c/d_c = 2$ wandert der Spitzenwert an der Auslaufseite aufgrund der Gewölbewirkung nach oben und bleibt bei $h = 3$ m stabil. Im Vertikalschnitt b ist ein wellenförmiger Verlauf zu sehen. An der Gegenseite ist kein erheblicher Spitzenwert vorhanden. Die Horizontaldrücke erhöhen sich im Vergleich zu den Fülllasten proportional. Der Grund dafür liegt darin, dass sich der Fließkanal bei kleinerer Schlankheit steiler ausbildet.

Der Materialfluss an den markierten Stellen für verschiedene Zeitpunkte während der Entleerung ist in Abbildung 6.15 zu sehen. Im Vergleich zu Abbildung 6.7 ist festzustellen, dass der Fließkanal die vierte markierte Höhenlage ($h = 2,5$ m) erreicht hat. Das Schüttgut über der Auslauföffnung senkt sich nicht mehr gleichmäßig ab wie bei dem Silo mit einer Schlankheit von 3. Außerdem kommt als eine mögliche Ursache für die unterschiedliche Lage des Spitzenwertes die geringere Auflast oberhalb des Berührungspunktes zwischen dem Fließkanal und der Wand bei kleiner Schlankheit in Betracht.

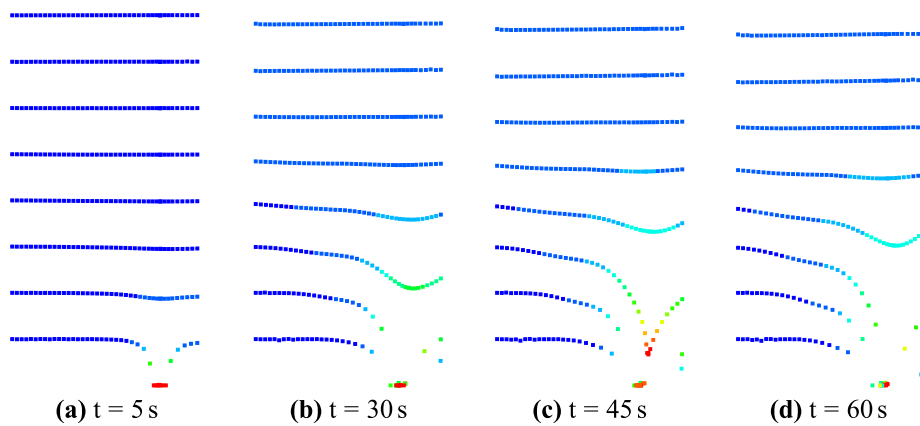


Abb. 6.15: Materialfluss in verschiedenen Höhenlagen während der Entleerung zu ausgewählten Zeitpunkten für die Schlankheit $h_c/d_c = 2$

Bei der Schlankheit $h_c/d_c = 5$ treten alle maximalen Druckspitzen an der gleichen Stelle auf. Daher ist es möglich, den Lastanteil aus der Exzentrizität für die Schlankheit $h_c/d_c \geq 3$ an der gleichen Stelle anzusetzen. Da eine ungleichmäßig verteilte Dichte im FE-Modell nicht berücksichtigt wird, sollte die Schlankheit in den Berechnungsansatz einfließen. Die Ungleichmäßigkeit der Silolasten infolge ungleichmäßiger Dichteverteilung wächst in der Regel mit zunehmender Schlankheit.

6.1.4 Zusammenfassung

Die Simulationsergebnisse zeigen, dass die Lasten aus dem aktuellen Ingenieurmodell nach DIN EN 1991-4 (2010) weit von der Realität entfernt sind. Dies ist hauptsächlich auf die Annahme eines sich parallel zu den Silowänden ausbildenden Fließkanales zurückzuführen. Im Fall des aktuellen Ingenieurmodells machen die Körner des Schüttgutes nur vertikale Wege. Daraus entsteht keine horizontale Kraftkomponente aus der Wandreibungslast. Das horizontale Gleichgewicht wird lediglich aus dem Horizontaldruck gebildet. Des Weiteren unterteilt das Modell den Querschnitt in drei Bereiche, sodass der Horizontaldruck in Umfangsrichtung nicht kontinuierlich verläuft.

In DIN EN 1991-4 sind zwar Fließprofile mit Schlotfluss bzw. gemischtem Schüttgutfließen aufgelistet (Abbildung 2.8), jedoch bezieht sich das Modell nach *Rotter* lediglich auf den parallelen Schlotfluss. In Abbildung 6.16 sind die räumlichen Fließprofile für Weizen und Sand dargestellt. Diese verdeutlichen, dass sich beim Weizen ein gemischtes Fließen einstellt, wobei der Fließkanal unterhalb der Oberfläche die der Auslauföffnung gegenüberliegende Silowand in Berührung kommt. Beim Sand ist der Fließtrichter viel steiler und es stellt sich ein konvergenter Schlotfluss ein.

Die durchgeführten numerischen Untersuchungen konnten bereits Aufschluss darüber geben, wie sich die Horizontaldruckverteilung in Abhängigkeit der Schüttgutkennwerte und der Schlankheit verändert. Nachfolgend wird angestrebt, die Druckverteilung über eine mathematische Beschreibung abzubilden. Die Parameter mit dem größten Einfluss auf den Horizontaldruck (der innere Reibungswinkel, der Wandreibungskoeffizient und die Exzentrizität) werden in dem Rechenansatz berücksichtigt.

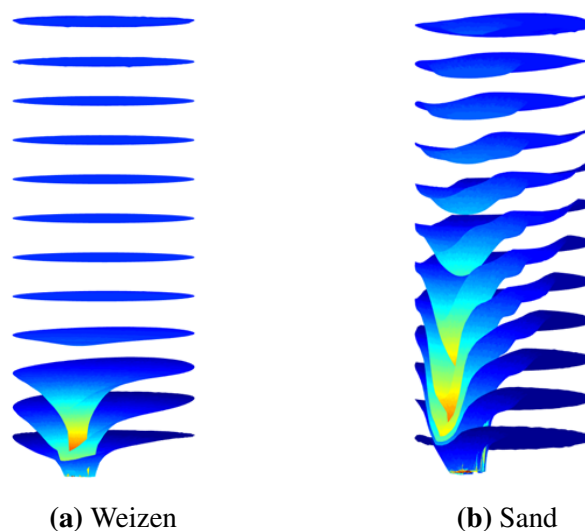


Abb. 6.16: Mittels Tracer-Partikel visualisierte Fließprofile der 3D-Entleerungssimulationen für Weizen und Sand im stationären Zustand

6.2 Tragverhalten und Schnittgrößen der Silowand

Nachfolgend wird untersucht, wie sich die Lastansätze aus der numerischen Simulation, dem vorgeschlagenen Ansatz und nach DIN EN 1991-4 auf das Tragverhalten auswirken. In der Norm werden Silos nach Fassungsvermögen und Füll- bzw. Entleerungsexzentrizitäten in drei Anforderungsklassen eingeteilt. Diese Einteilung basiert nicht auf wissenschaftlichen Untersuchungen, sondern auf der Überlegung, dass kleine Silos konservativ auf der sicheren Seite liegend bemessen werden sollten. Da das hier beachtete Silo ein Fassungsvermögen von weniger als 100 Tonnen hat, wird dieses normgerecht in die Anforderungsklasse 1 eingeordnet. Ein Silo kann jedoch immer auch einer höheren Anforderungsklasse zugeordnet werden, sodass es erlaubt ist, das Silo nach Anforderungsklasse 3 zu bemessen.

Exemplarisch wird das mit Weizen befüllte Silo untersucht. Der Berechnung liegt das Silo mit einer Exzentrizität von 0,3 zugrunde (Abbildung 4.21). Die Wanddicke beträgt 2 mm. Zur Schnittgrößenermittlung in der Silowand werden die zuvor berechneten Wandlasten im stationären Zustand und die mit dem Fließkanalverhältnis $G = 0,6$ berechneten Wandlasten aufgebracht. Für den Vergleich werden zudem die Fülllasten herangezogen. Das Silo wird gelenkig gelagert.

In Abbildung 6.17 sind die axialen Membranspannungen dargestellt. Die maximale axiale Spannung für den Entleerungszustand nach DIN EN 1991-4 ist 25 mal höher als die infolge der Fülllasten berechnete maximale Spannung. Dagegen liefert die Berechnung mit den simulierten Lasten einen Erhöhungsfaktor der axialen Spannung von 2,2. Außerdem kann das Ingenieurmodell das Tragverhalten nicht richtig wiedergeben. Nach der Norm entsteht im unteren Bereich der Auslauföffnung eine Zugspannung, während eine Druckspannung mit der simulierten Last im unteren Bereich über den gesamten Umfang dominierend ist.

Abbildung 6.18 zeigt die radialen Verformungsbilder. Die Verformungen sind für alle Bilder um das 20-fache einheitlich überhöht dargestellt. Im Füllzustand sind die Verformungen aufgrund der großen Steifigkeit der Schale bei rotationssymmetrischen Lasten sehr gering. Im Entleerungszustand betragen die radialen Verformungen mit den simulierten Beanspruchungen im oberen Bereich ca. 2 mm. Der Vorzeichenwechsel ist auf die Biegung in Umfangsrichtung zurückzuführen. Die Silowand wird im Bereich der Fließzone leicht abgeflacht und daneben stärker gebogen, was mit Biegemomenten unterschiedlicher Vorzeichen einhergeht. Dagegen verformt sich die Schale unter der Normlast sehr stark. Es ist noch zu erwähnen, dass die Verformung in der Wirklichkeit aufgrund des Vorhandenseins des Schüttgutes noch kleiner wird.

6 Exzentrische Entleerung und Diskussion

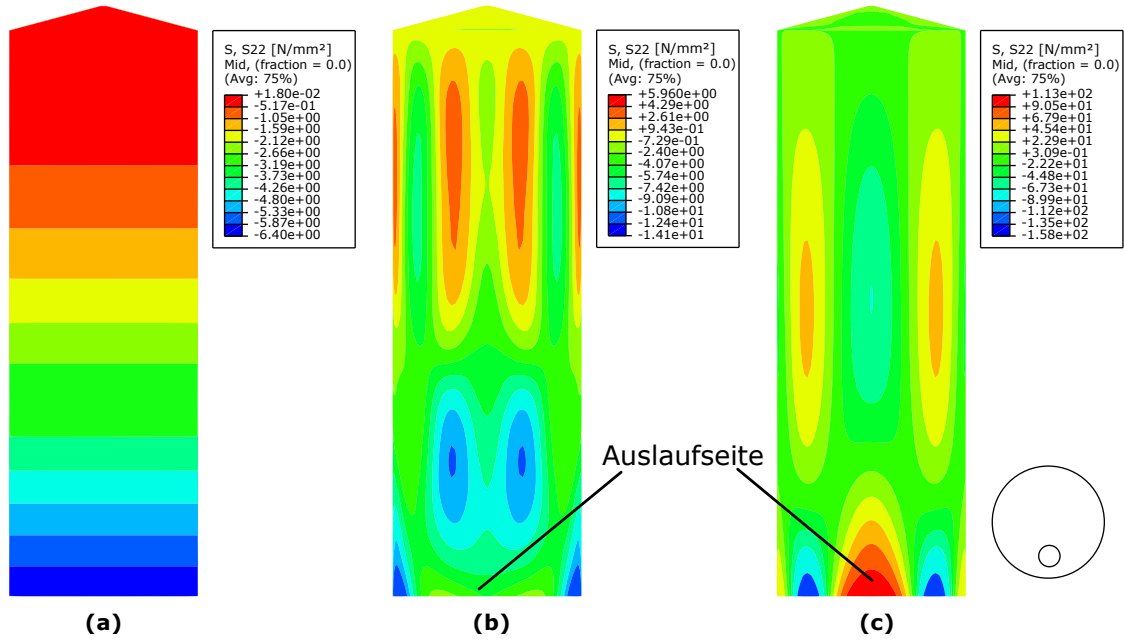


Abb. 6.17: Axiale Membranspannung (Vorderansicht); (a) Fülllasten, (b) Entleerungslasten aus der Simulation der Fließvorgänge, (c) Entleerungslasten nach EN 1991-4 mit $G = 0,6$

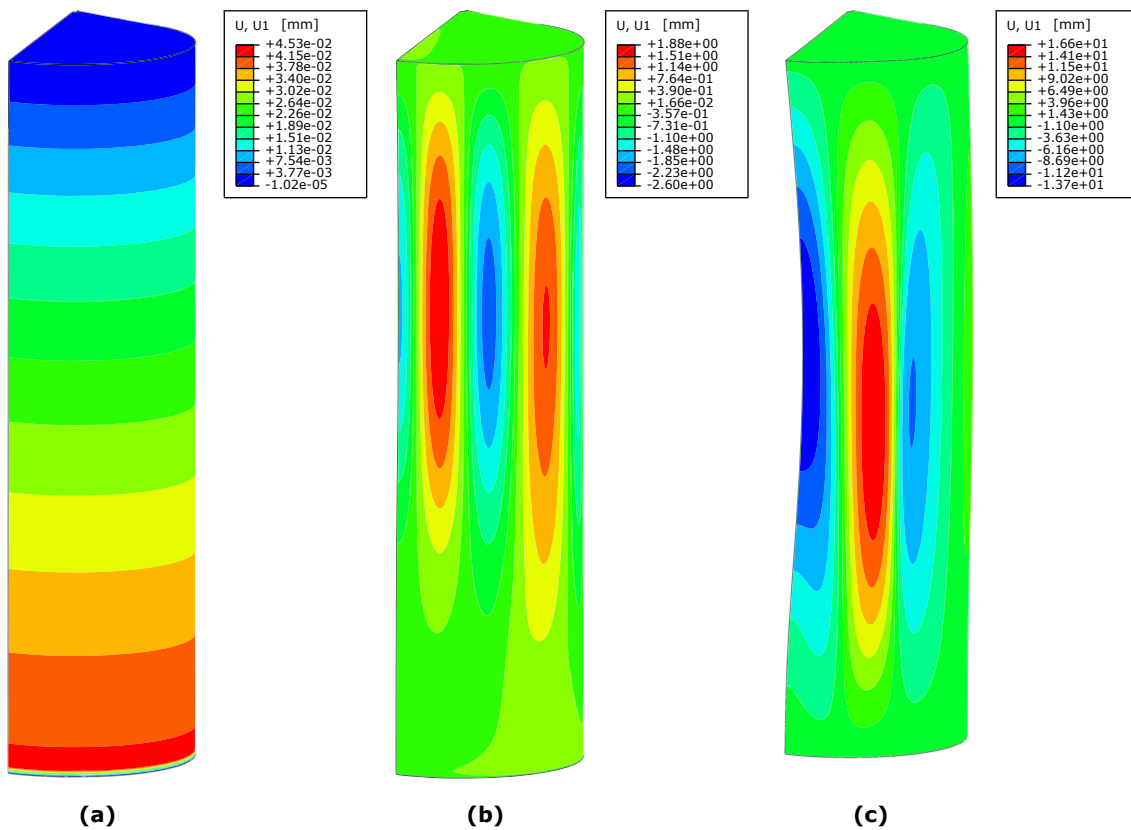


Abb. 6.18: Radiale Verformung; (a) Fülllasten, (b) Entleerungslasten aus der Simulation der Fließvorgänge, (c) Entleerungslasten nach EN 1991-4 mit $G = 0,6$

Der Biegeanteil im oberen Bereich ist auf die Unstetigkeit des Druckverlaufs zurückzuführen (Abbildung 6.1), die lokale Biegemomente verursacht. Diese Erkenntnis ist nicht neu. Das Modell nach *Rotter* wurde aus der schematisch dargestellten Verteilung (Abbildung 6.19a) abgeleitet. Die tatsächlichen Verhältnisse sind jedoch deutlich komplizierter als diese Abbildung suggeriert. Es wurde bereits festgestellt, dass sich die Spannungen in der Fließzone und der Ruhezone gegenseitig beeinflussen und der Durchmesser des Fließkanals nach oben hin zunimmt. Eine Unstetigkeit aus der Spannungumlagerung findet eher oberhalb des maximalen Druckanstiegs statt (Abbildung 6.19b). Da der Fließkanal im oberen Bereich aufgeweitet ist, ist die Spannungserhöhung auf eine breite Fläche verteilt.

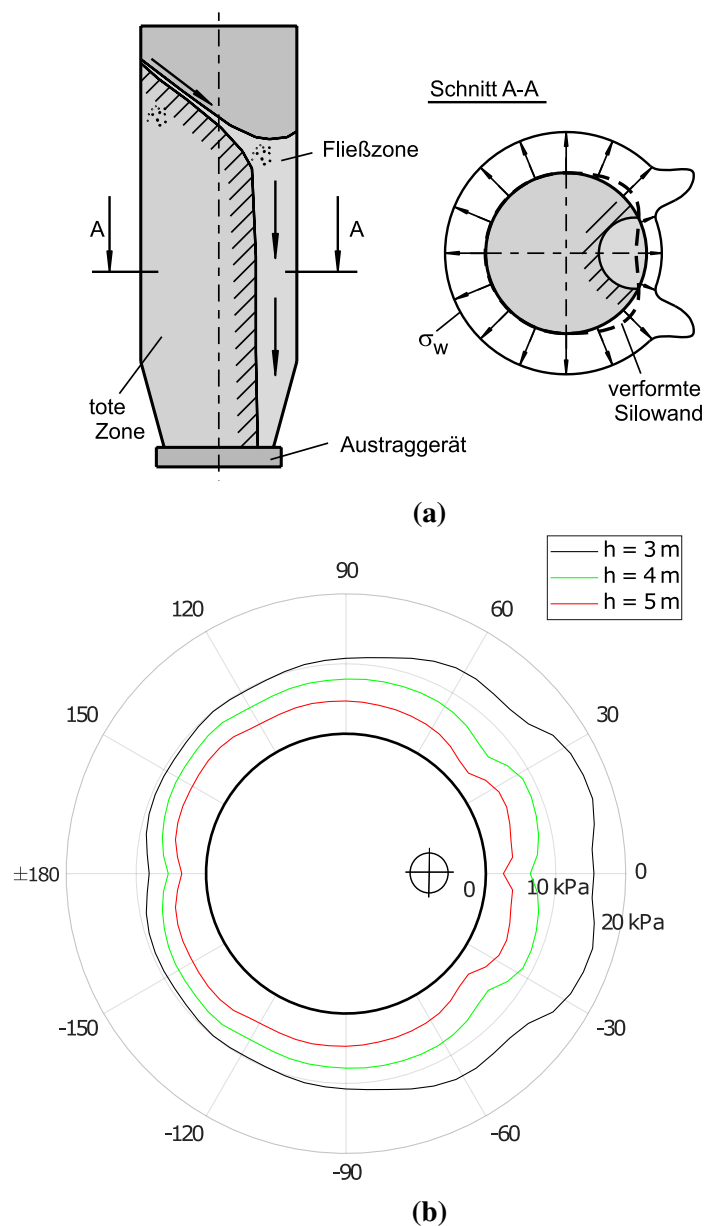


Abb. 6.19: Schematische Darstellung der umgelagerten Wandnormalspannung; (a) Theoretischer Ansatz (SCHULZE 2014) (b) Berechnet

Im unteren Bereich wird das Schüttgut nicht zusammengedrückt, deswegen ist der Verlauf der horizontalen Druckverteilung stetig. Diese stetig verteilten Flächenlasten werden überwiegend von den Membranspannungen abgetragen. Außerdem lässt sich in Abbildung 6.19b erkennen, dass die Spitzenspannung aus der Spannungsumlagerung nicht so stark ausgeprägt ist wie in der Annahme und die daraus resultierende Biegebeanspruchung demnach überschätzt wird. Die Unstetigkeit der Verteilung lässt sich qualitativ und quantitativ nur schwer durch ingenieurmäßige Ansatzfunktionen approximieren. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Verteilungen durch stetige Funktionen approximiert. Die mögliche Biegebeanspruchung sollte durch separate Ersatzlasten abgedeckt werden.

6.3 Beschreibung der Druckverteilung mittels eines mathematischen Ansatzes

Anhand der begrenzten Versuchsergebnisse und der großen Streubreite können nur qualitative Aussagen bezüglich der Wanddrücke bei der exzentrischen Entleerung getroffen werden. Eine befriedigende analytische Lösung ist aufgrund der Komplexität ausgeschlossen. Es wird deshalb angestrebt, mit Hilfe der numerischen Berechnung einen in der Praxis leicht zu handhabenden Ingenieuransatz, der die Einwirkung möglichst realitätsnah erfasst, zu entwickeln, mit dem eine sichere und wirtschaftliche Auslegung von Silos gewährleistet werden kann.

In den vorangegangenen Untersuchungen wurden festgestellt, dass sich die Silolasten beim Weizen und Sand im stationären Zustand deutlich unterscheiden. Während beim Weizen die Spannungsspitze an der Auslaufseite bei ca. 2,1 m – 2,6 m stabil bleibt, wird diese beim Sand nach kurzer Zeit abgebaut. Beim Weizen ergibt der stationäre Zustand die maßgebende Bemessungssituation, da die Größe der Silolasten bis zum stationären Zustand zunimmt. Beim Sand hat die Größe der Silolasten nach dem Anstieg bis zum stationären Zustand insgesamt wieder leicht abgenommen (siehe Abbildung 6.6). Das liegt daran, dass der Auflagerpunkt von dem räumlichen Gewölbe beim Sand mit aufgeweitetem Fließkanal nach oben wandert und die Auflagerkraft immer kleiner wird (Abbildung 6.20). Ein kritischer Zeitpunkt lässt sich nicht eindeutig erkennen, da die Größe bzw. das Kräftepaar geringer wird, aber das globale Biegemoment aufgrund des größeren Hebelarms größer werden könnte.

Zusätzlich wird eine Vergleichsberechnung mit einem inneren Reibungswinkel von 35° durchgeführt. Diese entspricht in etwa dem oberen Grenzwert des inneren Reibungswinkels für Weizen. Der Wandreibungskoeffizient μ ist der Norm entnommen und beträgt für den Wandtyp D2 0,38. Diese Berechnung dient dazu, die Einwirkung aus einem weniger fließfähigen Schüttgut zu erfassen. Das Ausgangsmaterial ist Weizen und die Exzentrizität bleibt bei $e_0 = 0,3 d_c$.

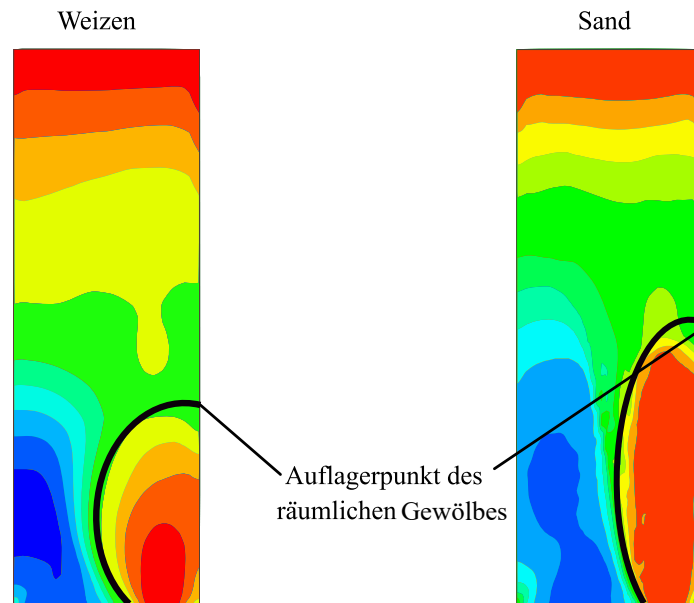


Abb. 6.20: Hauptspannung der Symmetrieebene mit dem idealisierten Gewölbe bei $t=5$ s

Im Folgenden werden exemplarisch die in Kapitel 6.1.1 dargestellten Horizontaldrücke für $e_0 = 0,3 d_c$, $\phi_i = 25,2$ und $\mu = 0,24$ sowie $e_0 = 0,3 d_c$, $\phi_i = 35,2$ und $\mu = 0,38$ durch mögliche Berechnungsansätze beschrieben.

6.3.1 Zweidimensionale Beschreibung der Wanddrücke

Die ungleichmäßig über den Siloquerschnitt und die Silohöhe verteilten Wanddrücke werden in den zahlreichen Berechnungsansätzen meistens durch cosinusförmige Verläufe beschrieben. Über die Höhe ist die Verteilung entweder konstant oder linear. Das Ingenieurmodell nach *Rotter* ergibt zwar drei unterschiedliche Druckzonen im Höhenschnitt, ist aber im Grunde genommen eine zweidimensionale Beschreibung, da der Druck in allen drei Fließbereichen konstant verläuft. Dadurch ist das Ingenieurmodell für die Ingenieurpraxis mit gängigen FEM-Programmen noch recht zu handhaben.

In diesem Kapitel wird angestrebt, die Wanddrücke analog zum Konzept der Teilflächenlast zweidimensional zu beschreiben. Die Wanddrücke im stationären Entleerungszustand werden in einen symmetrischen Anteil und einen Anteil aus der Exzentrizität aufgeteilt (Abbildung 6.21). In Anhang A.12 ist der Lastanteil aus der Exzentrizität räumlich dargestellt. Anhand der Abbildung 6.21 (c) lässt sich an der Auslaufseite erkennen, dass sich die Horizontaldrücke ($h = 0 - 2$ m) aus der Exzentrizität im negativen Bereich befinden. Bei $h = 2 - 4$ m ist eine Druckerhöhung zu erkennen. Im oberen Bereich ($h = 4 - 6$ m) werden die Horizontaldrücke nicht wesentlich von der Exzentrizität beeinflusst. Der Horizontaldruck wird über die Höhe des

6 Exzentrische Entleerung und Diskussion

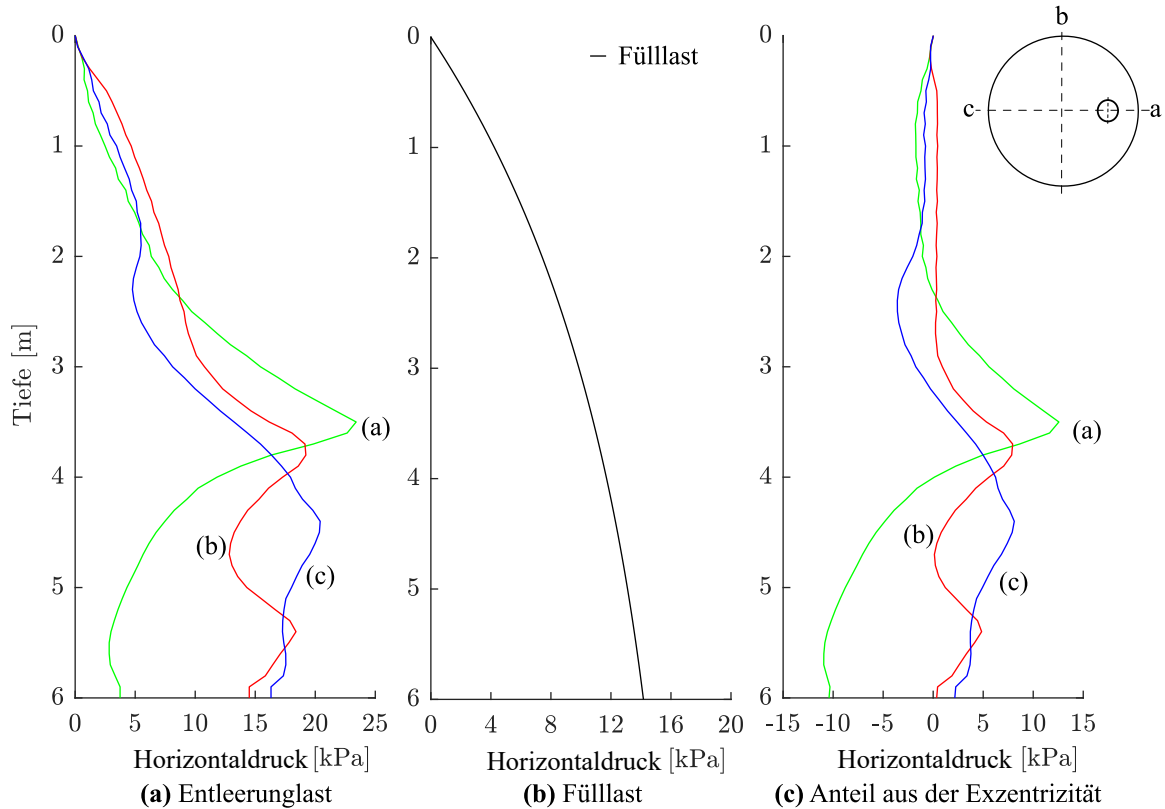


Abb. 6.21: Horizontaldrücke beim exzentrischen Entleeren, geteilt in symmetrische Fülllast und Anteil aus der Exzentrizität

jeweiligen Segments arithmetisch gemittelt. Durch die Mittelwertbildung wird sichergestellt, dass die axiale Spannung aus der Wandreibungslast gleich bleibt.

Es ist noch zu erwähnen, dass der symmetrische Anteil aus der Fülllast nicht der simulierten Fülllast entspricht, sondern normgerecht nach der Janssen-Theorie mit einem Horizontallastverhältnis $K = 1 - \sin(\phi)$ berechnet wird, da diese die Grundlage für alle Normen bildet. Der Unterschied ist jedoch sehr gering. Im Folgenden erfolgt die Berücksichtigung des Horizontaldruckanteils aus der Exzentrizität auf zwei begrenzten Teilflächen, die konstant über die Segmenthöhe verteilt sind. Zur Beschreibung der Umfangsdruckverteilung wird wie üblich eine Fourientwicklung vorgenommen. Beide Druckverteilungen werden als Fourierreihe mit jeweils drei oder vier Gliedern beschrieben. Die ermittelten Fourier-Koeffizienten sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst. In diesem Fall können beide Umfangsverteilungen bei einer Anzahl von drei Fouriergliedern bereits ausreichend genau beschrieben werden. Für den mittlere Bereich tritt der maximale Druck wegen der Spannungsumlagerung nicht direkt an der Auslauföffnung auf, sondern bei $\Phi = \pm 20^\circ$. Die Verteilung wird so approximiert, dass alle berechnete Punkte von der approximierten Kurve eingehüllt werden (Abbildung 6.22). Die Lastkoordinate ist mit der maximalen Fülllast zu multiplizieren.

6.3 Beschreibung der Druckverteilung mittels eines mathematischen Ansatzes

Tab. 6.2: Ermittelte Fourier-Koeffizienten

$p_h = a_0 + a_1 \cos(\Phi) + a_2 \cos(2\Phi) + a_3 \cos(3\Phi)$		a_0	a_1	a_2	a_3
$e_0 = 0,3 d_c, \phi = 25^\circ, \mu = 0,24$	h=0-2 m	0,0410	-0,4223	-0,1319	
	h=2-4 m	0,2145	0,1766	0,0111	
	h=0-2 m	0,0404	-0,4211	-0,1331	-0,0410
	h=2-4 m	0,2174	0,1810	0,0166	0,0217
$e_0 = 0,3 d_c, \phi = 35^\circ, \mu = 0,38$	h=0-4 m	0,1361	-0,3483	-0,2665	
	h=4-5 m	0,1418	0,3352	0,0564	
	h=0-4 m	0,1342	-0,3447	-0,2701	-0,1223
	h=4-5 m	0,1428	0,3368	0,0582	0,0052

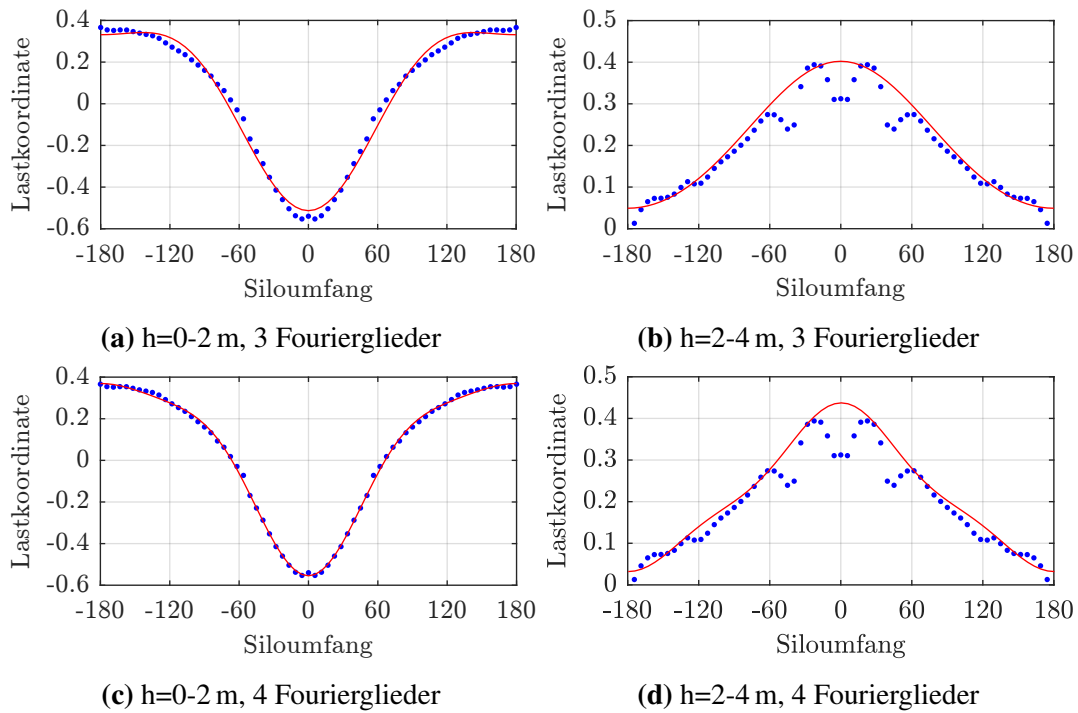


Abb. 6.22: Berechnete und über Fourierreihe approximierte Umfangsdruckverteilung: $e_0 = 0,3 d_c, \phi = 25^\circ, \mu = 0,24$

Wie bereits erläutert, dehnt sich der Fließkanal bei größerem inneren Reibungswinkel und Wandreibungskoeffizienten nicht so weit aus und der Öffnungswinkel wird kleiner, so dass sich ein exzentrischer konvergenter Schlottfluss anstatt eines gemischten Fließprofils ausbildet. Im vorangegangenen Kapitel wurde beim Sand bereits festgestellt, dass sich der Druck über die gesamte Höhe an der der Auslauföffnung gegenüber liegenden Seite proportional erhöht. Deswegen ist die Zunahme im ruhenden Bereich konstant. In Abbildung 6.23 lässt sich erkennen, dass die Horizontaldrücke von $\pm(60^\circ-180^\circ)$ konstant bleiben. In Anhang A.14-A.15 sind die approximierten Lastanteile aus der Exzentrizität räumlich dargestellt.

6 Exzentrische Entleerung und Diskussion

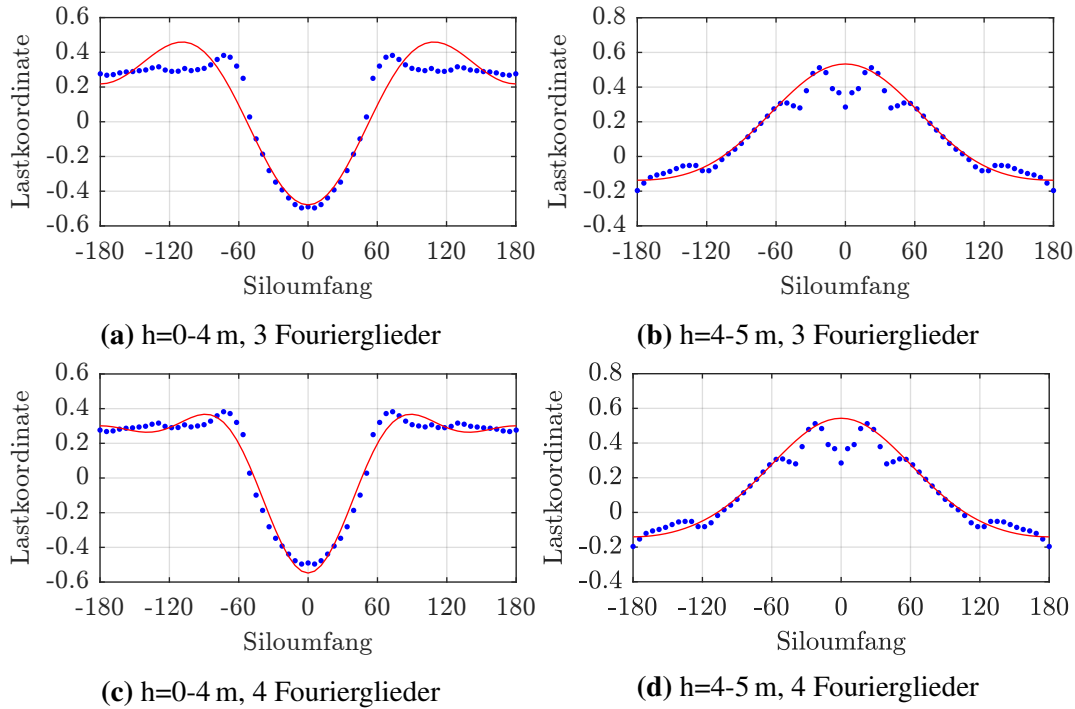


Abb. 6.23: Berechnete und über Fourierreihe approximierte Umfangsdruckverteilung: $e_0 = 0,3$ d_c , $\phi = 35$, $\mu = 0,38$

6.3.2 Räumliche Beschreibung der Wanddrücke

Durch die Mittelwertbildung wird die Ungleichmäßigkeit abgeflacht und der Biegeanteil dadurch vermindert. Im Folgenden wird die Druckverteilung räumlich beschrieben. Die neue Methode betrachtet die gesamte Höhe und bildet ein veränderliches Lastbild in beide Richtungen nach. In Umfangsrichtung wird der cosinusförmige Ansatz beibehalten. Über die Höhe stehen Polynome oder der Cosinus zur Auswahl. Im Vergleich zum Polynomansatz zeigt der Cosinusansatz ein über die Höhe sehr robustes Verhalten. Dabei gibt es die Besonderheit, dass die Höhe auf den Wertebereich von 0 bis π bezogen werden muss. Die Approximationsfunktion mit Cosinusansatz lautet:

$$f(\phi, h) = a_0 + a_1 \cos(\phi) + a_2 \cos(2\phi) + a_3 \cos(3\phi) \quad (6.1)$$

6.3 Beschreibung der Druckverteilung mittels eines mathematischen Ansatzes

mit:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_{00} + b_{01}\cos\left(\frac{h}{H}\pi\right) + b_{02}\cos\left(\frac{2h}{H}\pi\right) + b_{03}\cos\left(\frac{3h}{H}\pi\right) \\ a_1 &= b_{10} + b_{11}\cos\left(\frac{h}{H}\pi\right) + b_{12}\cos\left(\frac{2h}{H}\pi\right) + b_{13}\cos\left(\frac{3h}{H}\pi\right) \\ a_2 &= b_{20} + b_{21}\cos\left(\frac{h}{H}\pi\right) + b_{22}\cos\left(\frac{2h}{H}\pi\right) + b_{23}\cos\left(\frac{3h}{H}\pi\right) \\ a_3 &= b_{30} + b_{31}\cos\left(\frac{h}{H}\pi\right) + b_{32}\cos\left(\frac{2h}{H}\pi\right) + b_{33}\cos\left(\frac{3h}{H}\pi\right) \end{aligned}$$

Da die über die Höhe veränderliche Last durch den Cosinusansatz beschrieben werden kann, erfolgt die Approximation anders als bei der zweidimensionalen Beschreibung für die gesamten Horizontaldrücke. Die Lastkoordinate ist ebenfalls mit der maximalen Fülllast zu multiplizieren. In Tabelle 6.3 sind die Fourier-Koeffizienten aufgelistet. Abbildung 6.24 zeigt die approximierte Druckverteilung. Mit vier Gliedern kann die Ungleichmäßigkeit im unteren Bereich gut nachgebildet werden.

Tab. 6.3: Ermittelte Fourier-Koeffizienten

	$e_0 = 0,3 d_c, \phi = 25^\circ, \mu = 0,24$				$e_0 = 0,3 d_c, \phi = 35^\circ, \mu = 0,38$			
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3
b_0	0,7127	-0,0925	-0,0433	-0,0038	0,7599	-0,1747	-0,1549	-0,0728
b_1	0,4303	-0,2248	-0,0777	-0,0345	0,3722	-0,3173	-0,1661	-0,0396
b_2	-0,2003	-0,2376	-0,0709	-0,0145	-0,1831	-0,0259	0,0575	0,0508
b_3	-0,0573	-0,0135	-0,0391	0,0068	0,0711	0,1812	0,0282	-0,0446

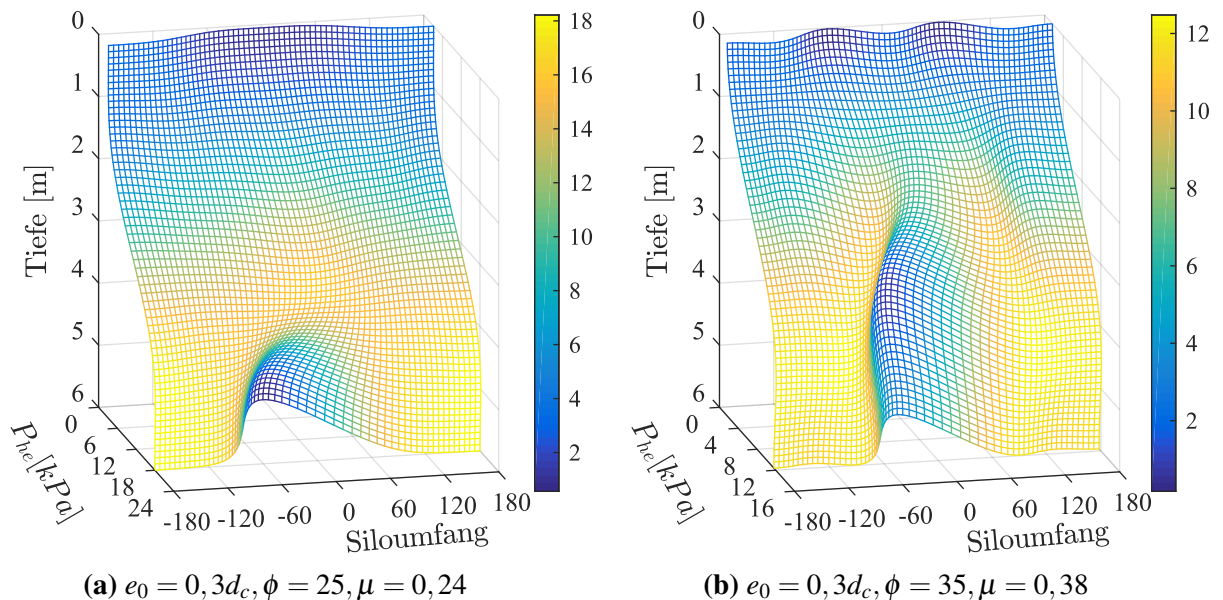


Abb. 6.24: Approximierte Horizontaldrücke mit je 4 Fouriergliedern in beide Richtungen

Zusätzlich bietet die diskrete Kosinustransformation (DCT) (JAIN 1989) eine gute Möglichkeit zur Approximation des Horizontaldrucks. Mit der DCT wird eine Matrix in ihr Spektrum transformiert. Das Spektrum hat die gleichen Abmessungen wie die Ausgangsmatrix. M und N in Gleichung 6.2 sind die Zeilen- und Spaltengröße der Druckverteilungsmatrix. Der Vorteil der DCT ist, dass die Daten im Spektrum leichter komprimiert werden können. Die Umkehrfunktion ist die inverse diskrete Cosinustransformation iDCT. Um scharfe Kanten, Sprünge und Knicke gut abbilden zu können, werden hohe Frequenzen benötigt. Es ist daher nicht möglich, scharfe Kanten nachzubilden, wenn gleichzeitig nur die niedrigen Frequenzen übernommen werden sollen. Vernachlässigt man die Glieder mit geringer Gewichtung, ist die Anzahl der Koeffizienten noch überschaubar. Mit zunehmender Anzahl an Gliedern verbessert sich zwar die Genauigkeit, dies führt jedoch zu einem nicht mehr zu bewältigenden Ingenieurmodell. In Anhang A.16 ist exemplarisch die Nachbildung durch die DCT mit einer 16×16 Matrix dargestellt. Die DCT mit einer 4×4 Matrix liefert ähnliche Ergebnisse wie die Fourierreihe. Die Koeffizienten sind in Tabelle 6.4 aufgelistet.

$$B_{pq} = \alpha_p \alpha_q \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2M} \cos \frac{\pi(2n+1)}{2N}, \quad \begin{cases} 0 \leq p \leq M-1 \\ 0 \leq q \leq N-1 \end{cases} \quad (6.2)$$

mit:

$$\alpha_p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}}, & p = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{M}}, & 1 \leq p \leq M-1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \alpha_q = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & q = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 1 \leq q \leq N-1 \end{cases}$$

Tab. 6.4: Ermittelte Koeffizienten mit der diskreten Cosinustranformation

	$e_0 = 0,3d_c, \phi = 25^\circ, \mu = 0,24$				$e_0 = 0,3d_c, \phi = 35^\circ, \mu = 0,38$			
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3
b_0	44,7222	4,2478	-2,0385	0,1880	47,753	7,6821	-6,82311	3,32026
b_1	19,3511	7,1317	-2,5414	1,1370	16,9513	9,7685	-5,2973	1,4264
b_2	-8,8720	7,4657	-2,3135	0,4962	-8,2161	0,8687	1,7461	-1,6478
b_3	-2,5946	0,2987	-1,2502	-0,1900	3,0468	-5,7564	1,0836	1,3656

6.4 Entwicklung eines Ingenieurmodells für die exzentrische Entleerung

Die qualitative Erfassung aller wesentlichen Einflüsse auf den Silodruck bei exzentrischer Entleerung ist bis heute nicht gelungen. Die Erkenntnisse zum Fließverhalten sind zwar in den letzten Jahren durch zahlreiche Forschungsvorhaben vorangeschritten, jedoch sind keine Ver-

6.4 Entwicklung eines Ingenieurmodells für die exzentrische Entleerung

allgemeinerungen möglich. Nur selten fand die Kenntniserweiterung ihren Niederschlag in Silovorschriften. Einerseits konnten oft nationale Erkenntnisse nicht international durchgesetzt werden, andererseits können nicht selten Forschungsvorhaben aufgrund fehlender Mittel nicht zum Ende gebracht werden. In der Praxis werden häufig pragmatische Lösungen aufgrund der Wirtschaftlichkeit in der Anwendung vorgezogen, wie der Lastfall für zentrische Entleerung, bei dem die Entleerungslasten aus der Multiplikation der Fülllasten mit einem Lasterhöhungsfaktor ermittelt wird.

Zur Verdeutlichung der Problematik bezüglich eines praxistauglichen Rechenansatzes wird eine Aussage zitiert, mit der HAMPE 1991b die Situation beschreibt:

"Wegen der zahlreichen Abhängigkeiten des Silobauwerkes von den verschiedensten Faktoren und Sachverhalten ist es nicht möglich, in Vorschriftenregelungen für alle vorkommenden Situationen verbindliche Orientierungen zu geben. Es ist in vielen Fällen ein Kompromiss zwischen dem Wunsch nach möglichst großer Wirklichkeitsnähe in der Erfassung der Einwirkungen und einer durch die Praxis leicht zu bewältigenden Berechnungsvorschrift zu finden. Silovorschriften sollten darauf orientiert sein, qualitative Sachverhalte bewusst zu machen, wenn sie nicht zur quantitativen Erfassung beitragen können."

Im vorigen Kapitel wurden mögliche Ansätze zur Beschreibung der Lastverteilung vorgestellt. Im Folgenden wird anhand der Parameterstudien ein Rechenansatz entwickelt, mit dem sich die Silolasten beschreiben lassen. In Tabelle 6.3 sind 4×4 Matrizen zur Nachbildung des Horizontaldruckes für beide Berechnungen dargestellt. Um den Einfluss der verschiedenen Einflussfaktoren auf die Druckverteilung zu quantifizieren, werden die Koeffizienten durch einen linearen Ansatz beschrieben. Aufgrund der 16 Koeffizienten ergeben sich bei der Berechnung 64 Glieder und damit eindeutig zu viel für die Ingenieurpraxis. Reduziert man die 4×4 Matrix auf eine 2×3 Matrix, entstehen nur 24 Glieder, da Cosinusansätze die Eigenschaft haben, dass die Glieder gelöscht werden dürfen, ohne dass dabei neu gefittet werden muss. Bei kleinem inneren Reibungswinkel und Wandreibungskoeffizienten lässt sich Formel 6.1 durch eine 2×3 Matrix wie folgt vereinfachen:

$$f(\phi, h) = a_0 + a_1 \cos(\theta) \quad (6.3)$$

mit:

$$a_0 = b_{00} + b_{01} \cos\left(\frac{h}{H} \pi\right) + b_{02} \cos\left(2 \frac{h}{H} \pi\right)$$

$$a_1 = b_{10} + b_{11} \cos\left(\frac{h}{H} \pi\right) + b_{12} \cos\left(2 \frac{h}{H} \pi\right)$$

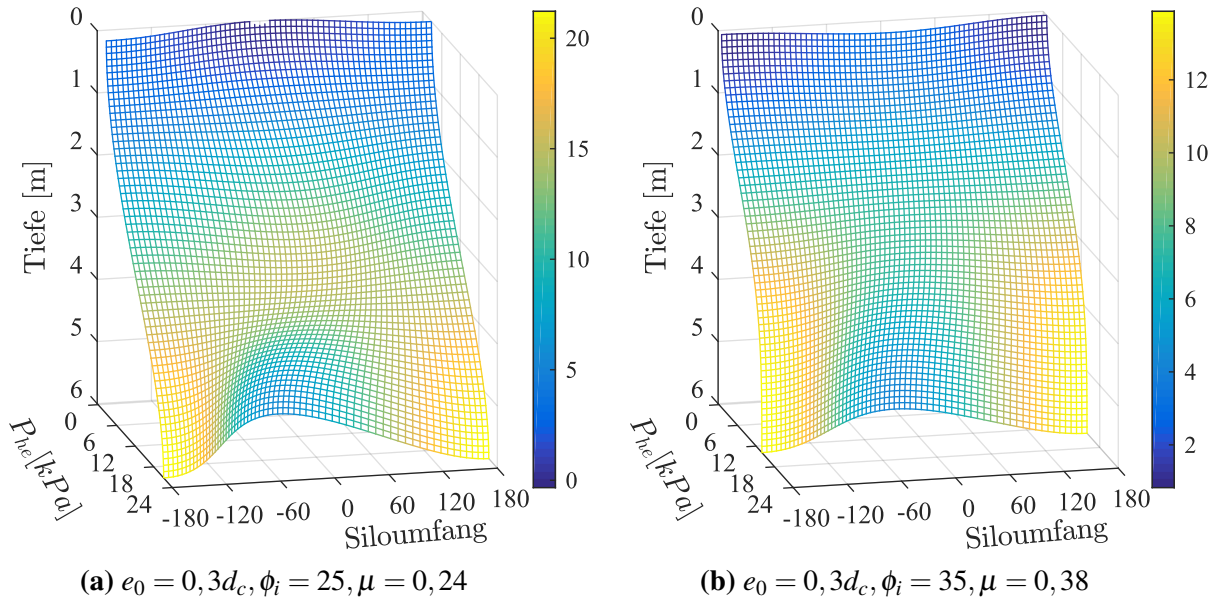


Abb. 6.25: Approximierte Horizontaldrücke mit 2×3 Matrix

In Abbildung 6.25 (A) ist der Fall für $\phi_i = 25, \mu = 0,24$ mit einer 2×3 Matrix dargestellt. Die höheren Glieder sind nur gering gewichtet und das Bestimmtheitsmaß wird von 0,89 auf 0,85 reduziert, während für $\phi_i = 35, \mu = 0,38$ das Bestimmtheitsmaß von 0,91 auf 0,73 stärker reduziert wird (Abbildung 6.25(B)). Diese Differenz sowie dessen Auswirkung soll durch Sicherheitszuschläge abgedeckt werden. Es ist noch zu erwähnen, dass sich die Verteilung durch eine 2×3 Matrix umso genauer beschreiben lässt, je flacher der Fließkanal ist.

Im nächsten Schritt wird eine Parameterstudie durchgeführt, um eine verallgemeinerte Formel zu entwickeln. Die in der Parameterstudie veränderlichen Eingangswerte sind der innere Reibungswinkel ϕ_i ($25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$), der Wandreibungskoeffizient μ (0,24, 0,31, 0,38) und die Exzentrizität e_x (0,2, 0,3, 0,4). Daraus ergeben sich insgesamt 27 Berechnungen. Das Ausgangsmaterial für die Simulation ist Weizen, d.h. alle Schüttgutparameter wie der E-Modul, die Poissonzahl und die Dichte bleiben unverändert.

6.4 Entwicklung eines Ingenieurmodells für die exzentrische Entleerung

Lösungsweg:

Um die Qualität der Nachbildung zu beurteilen, wird die Methode der kleinsten Quadrate verwendet. Die Quadratsumme der Residuen wird wie folgt berechnet:

$$\sum_{R=1}^n R = (Y_{Nachgebildet} - Y_{Berechnet})^2 \quad (6.4)$$

Allerdings wird zuerst der Fehler in negative und positive Differenzen unterschieden, um eine Sicherheit einzubauen. Eine negative Differenz bedeutet, dass die nachgebildeten Werte unterschätzt werden. Diese wird als unsicheres Residuum bezeichnet. Eine positive Differenz wird als unwirtschaftliches Residuum bezeichnet. Das unsichere Residuum wird hierbei 19 mal stärker als das unwirtschaftliche Residuum gewichtet. Die Last wird dadurch vorwiegend dort angehoben, wodurch die Unsicherheit am meisten reduziert wird. Ein 95%-Fraktil, wie es im Bauwesen üblich ist, würde zu einer konservativen Beanspruchung führen, weil die Spitzenspannungen durch die Approximation abgeflacht werden. Der Ansatz muss mit einem Lastvergrößerungsfaktor multipliziert werden, um ein 95%-Fraktil zu erreichen.

Für jede Berechnung werden die sechs Cosinusparameter gefittet. Dazu wird die gewichtete Summe der Fehlerquadrate minimiert. Jeder dieser sechs Parameter wird durch den linearen Ansatz gefittet:

$$b = b_{const} + e_x b_{ex} + \sin(\phi) b_{\phi} + \mu b_{\mu} \quad (6.5)$$

Es soll diejenige Korrelationsmatrix ausgewählt werden, bei der die Summe der Fehlerquadrate aller Berechnungen minimal ist. Nach statistischer Auswertung ergibt sich eine 4×6 Korrelationsmatrix für die Koeffizienten (Tabelle 6.5).

Tab. 6.5: Korrelationsmatrix für Koeffizienten

	b_{00}	b_{01}	b_{02}	b_{10}	b_{11}	b_{12}
e_x	0,1907	-0,0400	0,0531	0,0406	0,2437	-0,1357
ϕ	0,5645	-0,3084	0,0839	0,0233	0,6242	-0,1585
μ	0,1923	1,2046	-0,0313	0,0209	-0,0676	0,6645
<i>constant</i>	0,5570	-0,6248	-0,3118	-0,0338	-0,1646	-0,3691

Es wird zudem untersucht, welche dieser einzelnen Glieder einen geringen Einfluss auf die Summe der Fehlerquadrate haben. Nach Löschen des einzelnen Glieds wird die Korrelationsmatrix erneut berechnet. Nach iterativen Berechnungen ergibt sich die reduzierte Korrelationsmatrix mit 10 Gliedern (siehe Table 6.6). Die Quadratsumme erhöht sich lediglich um 1%. Bemerkenswert ist hierbei, dass die Exzentrizität kaum Einfluss auf die Quadratsumme hat. Dies ist damit zu begründen, dass sich die Größe des Horizontaldruckes nicht ändert, wenn die Exzentrizität größer als $0,2d_c$ ist, sich nicht voneinander unterscheiden. Außerdem kann bei

der Approximation nur die Einwirkung, aber nicht deren Auswirkung berücksichtigt werden. Beim Weizen ist der Neigungswinkel aufgrund der besseren Fließfähigkeit geringer als beim Sand, wodurch sich die Lage bei unterschiedlichen Exzentrizitäten nicht wesentlich ändert. Die Übertragbarkeit dieser Erkenntnis auf andere Schüttgüter bzw. Schlankheiten sollte jedoch noch überprüft werden, da die Spannungsverteilung mit dem Fließkanal korreliert, welcher wesentlich von dem Schüttgut und der Silogeometrie abhängt.

Tab. 6.6: Reduzierte Korrelationsmatrix für Koeffizienten

	b_{00}	b_{01}	b_{02}	b_{10}	b_{11}	b_{12}
e_x	0	0	0	0	0	0
ϕ	0,5005	-0,2877	0	0	0,3755	0
μ	0,2099	1,2147	0	0	0	0,6638
$constant$	0,6350	-0,6484	-0,2670	0	0	-0,4833

Setzt man die Korrelationskoeffizienten in die Gleichung 6.3 ein, vereinfacht sich die Formel zu:

$$\begin{aligned}
 f(\theta, h) = & (0,5005 \sin(\phi) + 0,2099\mu + 0,6350) \\
 & + (-0,2877 \sin(\phi) + 1,2147\mu - 0,6484) \cos\left(\frac{h}{H}\pi\right) \\
 & + (-0,2670) \cos\left(2\frac{h}{H}\pi\right) \\
 & + ((0,3755 \sin(\phi) \cos\left(\frac{h}{H}\pi\right) + (0,6638\mu - 0,4833) \cos\left(2\frac{h}{H}\pi\right)) \cos(\theta)
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Ergänzend sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass das Gleichgewicht für das Teilflächenkonzept und den Lastansatz für große Exzentrizitäten nicht erfüllt ist. Über den Ansatz in Gleichung 6.3 und Aufintegration in Umfangsrichtung θ und der Tiefe z ergibt sich die resultierende Last in horizontaler Richtung:

$$\begin{aligned}
 F_{pe} = & R \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} (a_0 + a_1 \cos(\theta)) \cos(\theta) d_z d\theta \\
 = & R \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} (b_{00} + b_{01} \cos\left(\frac{h}{H}\pi\right) + b_{02} \cos\left(2\frac{h}{H}\pi\right)) \cos(\theta) d_z d\theta \\
 & + R \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} (b_{10} + b_{11} \cos\left(\frac{h}{H}\pi\right) + b_{12} \cos\left(2\frac{h}{H}\pi\right)) \cos(\theta) \cos(\theta) d_z d\theta \\
 = & R \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} b_{10} \cos(\theta) \cos(\theta) d_z d\theta
 \end{aligned}$$

Da b_{10} gleich null ist, erfüllt der Ansatz das Gleichgewicht und ist somit in sich geschlossen. Diese inhärente Eigenschaft ist für die praktische Umsetzung von Vorteil, da es durch Plausibilitätskontrolle leicht kontrollierbar ist, ob die Last richtig aufgebracht wurde. Außerdem wird die Schale global nicht auf Biegung aus dem Ungleichgewicht beansprucht, woraus sich zusätzliche, axiale Spannungen ergeben würden.

6.5 Auswirkung des neuen Ansatzes auf die Bemessung

Nachfolgend wird untersucht, wie sich der entwickelte Lastansatz auf das Tragverhalten auswirkt. Es sollte zunächst überprüft werden, ob der neue Ansatz im Vergleich zu den simulierten Silolasten auf der sicheren Seite liegt. Beispielhaft wird zum Vergleich die Berechnung für den Fall $e_0 = 0,3 d_c$, $\phi_i = 25^\circ$ und $\mu = 0,24$ aus der Parameterstudie herangezogen. Abbildung 6.26 zeigt die Membranspannungen mit dem entwickelten Ansatz. Die Membranspannung in Umfangsrichtung entspricht qualitativ der Verteilung des Horizontaldrucks. Damit zeigt sich, dass die wichtigen Erkenntnisse aus der Simulation der Fließvorgänge erfasst werden. An der Auslaufseite nimmt die Spannung mit der Tiefe zuerst rasch zu und wird dann immer geringer. Die für die Bemessung maßgebende Meridianspannung beträgt $17,3 \text{ N/mm}^2$ und überschreitet die maximale Meridianspannung von $14,1 \text{ N/mm}^2$ aus der simulierten Beanspruchung (Abbildung 6.18). Ein Unterschied ist, dass die maximale Axialspannung bei 0° liegt, während die maximale Stelle mit der simulierten Last bei 60° auftritt. Das liegt daran, dass der maximale Horizontaldruck im unteren Bereich bei 60° liegt (Abbildung 6.1) und der Horizontaldruck an der Auslaufseite geringer ist als mit dem neuen Ansatz. Somit ergibt sich die maximale Meridianspannung resultierend aus der Wandreibungslast bei 60° . Außerdem erzeugt das Kräftepaar aus dem mittleren Horizontaldruck an der Auslaufseite und dem unteren Bereich an der Gegenseite ein Biegemoment mit zusätzlichen Meridianschnittgrößen.

In der Praxis wurden oft Beulen am Boden oder auch in der Mitte des Schafts entdeckt. Dies könnte an der Ausführung einer abgestuften Wanddicke liegen; da die Membrannormalkraft in Meridianrichtung im Füllzustand allmählich ansteigt, wächst die Membrannormalkraft in der Mitte überproportional an. In Abbildung 6.27 ist der Unterschied beider Membrannormalkräfte zu erkennen. Überraschend ist, dass die Membrannormalkraft aus dem globalen Moment mit der aus der Wandreibungslast vergleichbar ist. Daraus kann die Erkenntnis gezogen werden, dass eine Auslegung des Silos mit abgestufter Wanddicke aufgrund der Membrannormalkraft im Füllzustand für den Entleerungszustand besonders stabilitätsgefährdet ist.

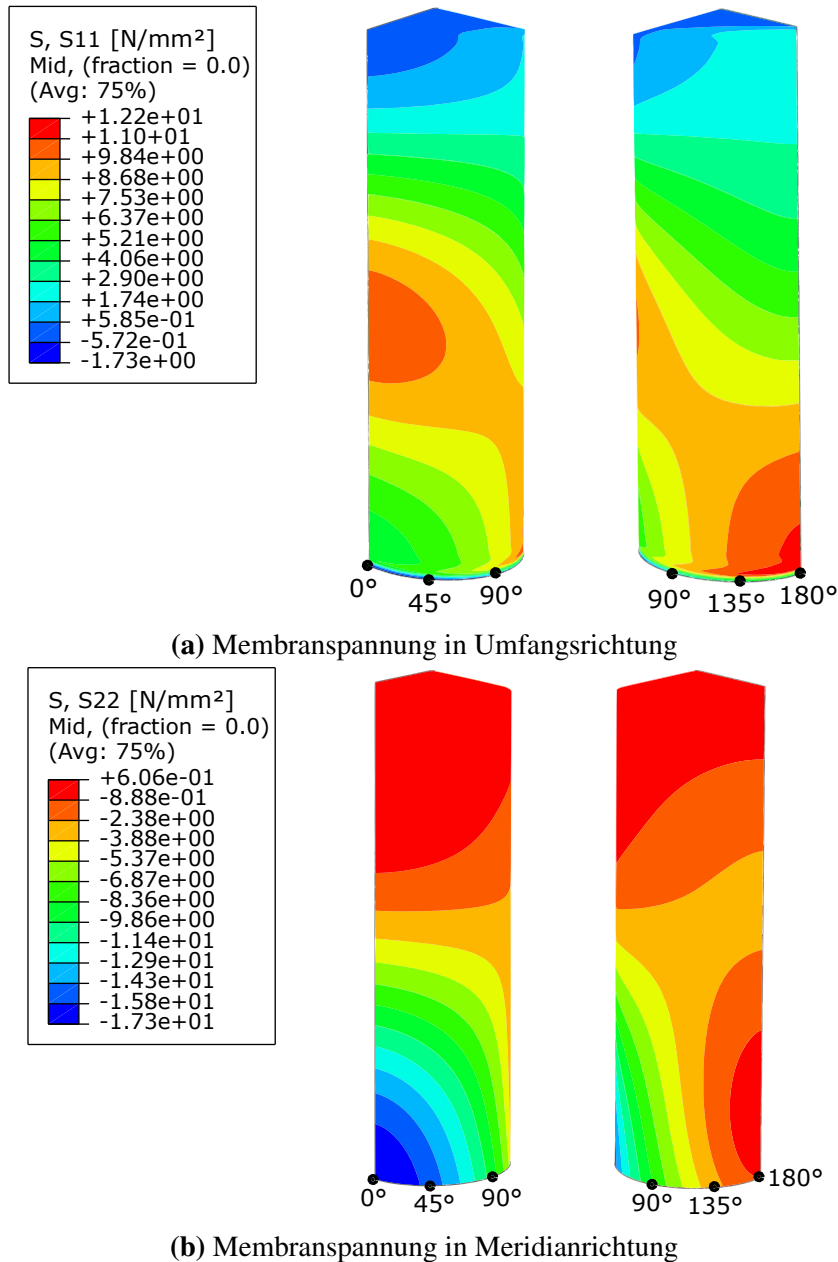


Abb. 6.26: Mit dem entwickelten Ansatz ermittelte Membranspannungen

Führt man den Nachweis mit dem spannungsbasierten Konzept, so würde sich für diesen Lastfall ein Lasterhöhungsfaktor von 2,23 ergeben. Da der tatsächliche Horizontaldruck im Auslaufbereich noch geringer ist als der mit dem neuen Ansatz ermittelte Wert, wird der gleichzeitig wirkende Innendruck vernachlässigt. Das Hauptproblem dieses spannungsbasierten Konzeptes besteht aber darin, dass eine wirtschaftliche Bemessung bei Schalentragswerken mit stark nicht membrangerechten Belastungen oder bei ausgesteiften Schalentragswerken kaum zu erreichen ist, da die Spannungen durch eine Aussteifung oft nicht signifikant verringert werden. In der Realität wird die Tragfähigkeit jedoch deutlich erhöht.

6.5 Auswirkung des neuen Ansatzes auf die Bemessung

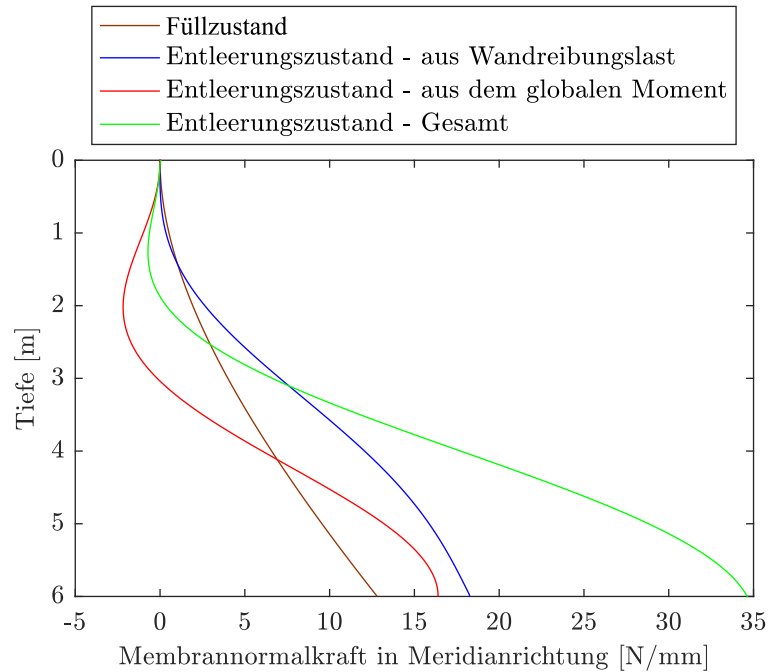


Abb. 6.27: Membrannormalkraft beim Füllzustand und Entleerungszustand an der Auslaufseite

Wie schon in Kapitel 2 erläutert, gilt der numerisch gestützte Beulsicherheitsnachweis mittels globaler MNA/LBA-Berechnung als das sinnvollste Bemessungsverfahren, da der Beulwiderstand auf globaler Ebene erfolgt. Die LBA-Analyse liefert die in Abbildung 6.28a dargestellte erste Eigenform mit einem Eigenwertfaktor von 15,2. Der plastische Referenzwiderstand beträgt 13,2. Daraus ergibt sich ein Lasterhöhungsfaktor mit dem Beulparameter für die unter Axialdruck beanspruchte Zylinderschale von 2,31. Mit der simulierten Last würde sich ein Lasterhöhungsfaktor von 2,82 ergeben. Somit liegt der Ansatz mittels dieses Verfahrens auf der sicheren Seite und führt aufgrund der um 20% geringeren Tragfähigkeit nicht zu einer Überdimensionierung der Silokonstruktion.

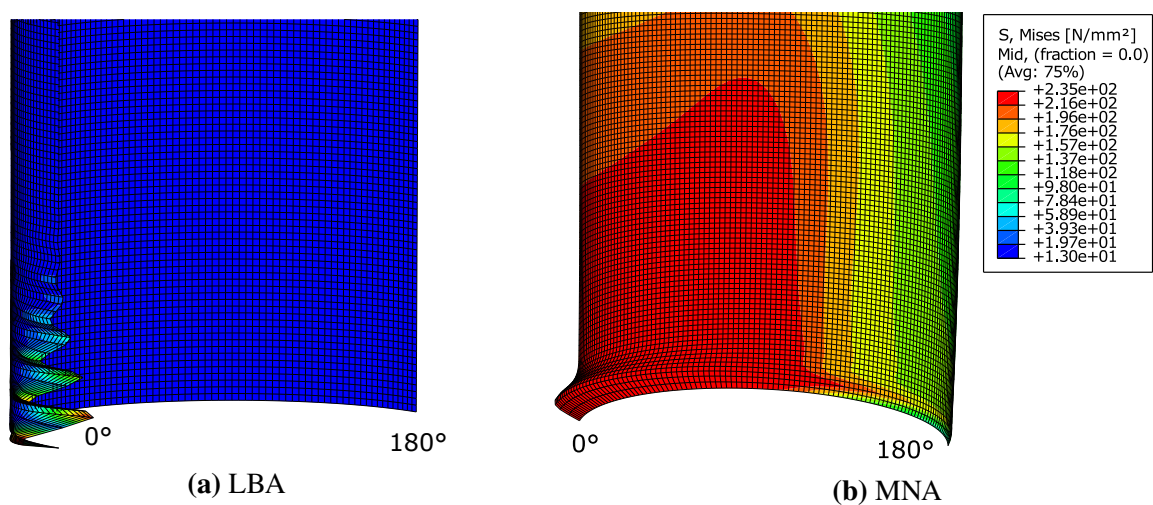


Abb. 6.28: Versagensmuster mittels globaler MNA/LBA-Berechnung

Um das Beulverhalten des Silos unter dem entwickelten Ansatz zu untersuchen, wird die reale Beullast mittels einer GMNIA-Berechnung ermittelt. Die Imperfektionsamplitude $\Delta w_{0,eq}$ wird konsequent nach Gleichung 2.23 berechnet. Dabei werden eigenformaffine Imperfektionsformen mit nach innen oder außen gerichteter Beule und kollapsaffine Imperfektionsformen als beulanregende Form untersucht. Die Imperfektionsamplitude bezieht sich auf die Beultiefe im unteren Bereich nahe der Auslauföffnung.

Die Lastfaktoren aus der GMNIA-Berechnung kennzeichnen alle das eindeutige Maximum des jeweiligen Last-Verformungspfades (Abbildung 6.29a). Dabei wurde eine Abminderung der Tragfähigkeit bei allen drei Imperfektionsformen festgestellt. Die kollapsaffine Imperfektion wurde als der maßgebende Imperfektionsansatz identifiziert. Abbildung 6.29b zeigt beispielhaft die Versagensform mit der eigenformaffinen Imperfektionsform.

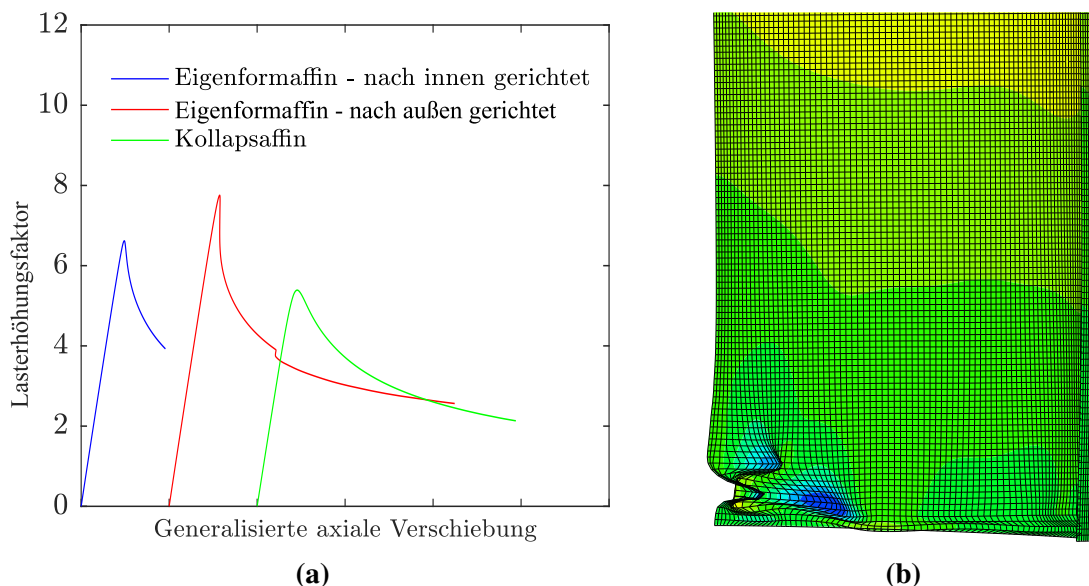


Abb. 6.29: (a) Lastfaktoren mit unterschiedlichen Imperfektionsansätzen ; (b) Nach innen gerichtete eigenformaffine Imperfektionsform als Ansatz für globales Versagen (8-fache Überhöhung)

In SADOWSKI u. a. 2011a wird für Siloschalen nach dem *Rotter*-Modell gezeigt, dass die Tragfähigkeit für größer werdende Imperfektionsamplituden zunächst abnehmen und danach wieder zunehmen kann. Dieser versteifende Effekt ist auf die sprunghafte Lastverteilung zurückzuführen, bei der große Verformungen zu erwarten sind und die Membranwirkung der Zylinderschale nicht aktiviert werden kann. Hingegen wird die Tragfähigkeit mit zunehmender Imperfektionstiefe mit dem neuen Ansatz immer geringer, was der ingenieurmäßigen Erwartung entspricht und somit auch normkonform ist (Abbildung 6.30). Der GMNIA-Faktor mit der simulierten Last liegt bei 7.3 und damit unter dem mit dem neuen Ansatz ermittelten Wert.

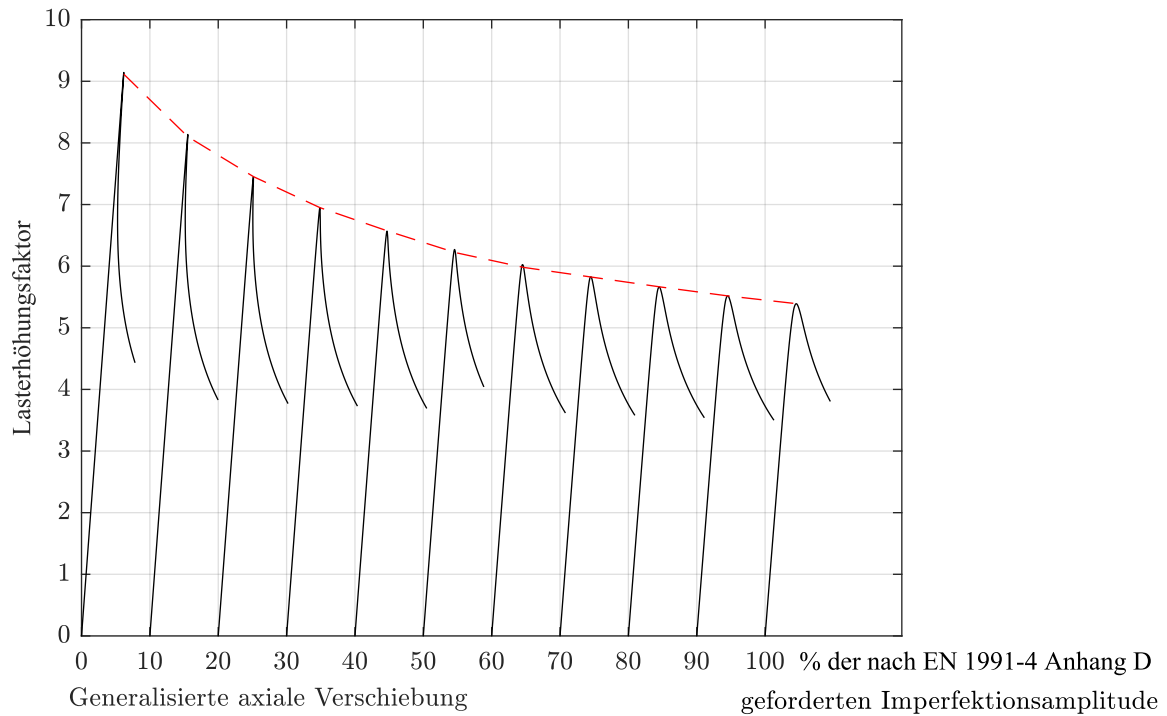


Abb. 6.30: Sensitivitätskurve der Imperfektionsamplitude

Anhand der drei Nachweisformaten für den Beulsicherheitsnachweis wurde festgestellt, dass der neue Ansatz eine praxisgerechte und realitätsnahe Bemessungssituation darstellt, mit der eine wirtschaftliche und sichere Bemessung gewährleistet werden kann. Dabei wurde mittels numerisch gestützter Methoden die Ursache für das Versagen von Metallsilos identifiziert. Das globale beim Entleeren entstehende Moment und die erhöhte Wandreibungslast machen Metallsilos besonders stabilitätsgefährdet gegenüber Axialbeulen. Aufgrund der genauen Erfassung der Beanspruchung kann durch eine Aussteifung an der maßgebenden Stelle die Tragfähigkeit gezielt erhöht werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war, räumliche Fließvorgänge in Silos bei einer exzentrisch angeordneten Auslauföffnung zu untersuchen und die resultierende Beanspruchung auf die Silowand zu ermitteln. Die Beanspruchung sollte durch einen ingenieurmäßigen und mathematischen Ansatz beschrieben werden.

Zuerst wurde das Ingenieurmodell nach *Rotter* für Silos mit großen Exzentrizitäten mittels numerisch gestützter Beulsicherheitsnachweise untersucht. Die Unzulänglichkeit für die Praxis und die Behauptung, dass keine wirtschaftliche Bemessung mit dem aktuellen Ingenieurmodell möglich ist, wurden dabei bestätigt. Um die Beanspruchungen genauer zu erfassen und eine sichere und zeitgleich wirtschaftliche Bemessung zu ermöglichen, wurden numerische Methoden herangezogen. Dabei zeigte sich die ALE-Methode der kontinuumsmechanischen Modellierung als die effizienteste Methode. Spezielle Kontaktformulierungen verknüpfen die Schüttgut-Elemente mit der Schale, die als Starrkörper oder mit verformbaren Elementen ausgebildet werden kann. In Verbindung mit einem expliziten Solver ist diese Methode in der Lage, komplexe Entleerungsvorgänge stabil, effizient und über lange Entleerungszeiten bei unterschiedlichen Randbedingungen zu simulieren. Die Modellierung des Schüttgutes kann zwar durch die Implementierung des Stoffgesetzes „Hypoplastizität“ verbessert werden, jedoch lässt sich ein allgemein gültiges Ingenieurmodell aufgrund der Vielzahl an Parametern kaum realisieren. Die Wechselwirkung zwischen dem Schüttgut und der Silowand wurde als weniger ausschlaggebend für die Spannungsverteilung identifiziert.

Anschließend folgte die Validierung der ausgewählten numerischen Methode. Es zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den experimentellen und numerischen Ergebnissen. Mit Hilfe der *tracer particles* kann der Materialfluss verfolgt werden. Dies ermöglicht ein besseres Verständnis der Wechselwirkungen zwischen dem Fließprofil und den assoziierten Spannungen. Nach der Validierung folgten räumliche Entleerungsberechnungen für Weizen und Sand. Die beiden Fließprofile verdeutlichen, dass sich oberhalb einer exzentrischen Auslauföffnung ein trommelförmiger Fließkanal ausbildet, dessen Außengrenzen, je nach gelagertem Schüttgut, die der Auslauföffnung gegenüber liegende Wand oder die Schüttgutoberfläche erreichen. Der dabei entstehende exzentrisch konvergente Schlotfluss sowie das exzentrische gemischte Flie-

ßen werden im Regelwerk nicht berücksichtigt und es bedarf damit einer Berücksichtigung, weil die unterschiedlichen Fließprofile zu unterschiedlichen Spannungsumlagerungen sowie Wanddrücken führen.

Anhand der detaillierten numerischen Untersuchungen konnten Verbesserungsvorschläge für eine analytische Ermittlung der Wandlasten formuliert werden. Für die analytische Lösung wurden mögliche mathematische Ansätze zur Beschreibung der Spannungsverteilung verwendet. Im Anschluss daran wurde eine Parameterstudie mit variierenden Schüttgutparametern durchgeführt und ausgewertet. Aufbauend auf den Ergebnissen der Parameterstudie wurde ein Ansatz für die Druckverteilung im mit Weizen befüllten Silo abgeleitet.

Anschließend zeigten die Beulsicherheitsnachweise, dass das Tragverhalten von Silos unter Verwendung des neuen Ansatzes realitätsnah abgebildet werden kann und eine sichere und wirtschaftliche Auslegung möglich ist. Außerdem ist das LBA/MNA-Konzept für die praktische Anwendung aufgrund seiner benutzerfreundlichen Handhabung gegenüber der GMNIA zu favorisieren.

Ausblick

Die in dieser Arbeit erörterten Ergebnisse beschränken sich auf zwei Schüttgüter und schlanke Silos. Dies motiviert eine Erweiterung des Rechenansatzes für andere Schüttgüter bei unterschiedlichen Dimensionen. Der vorgeschlagene Ansatz für Weizen kann hierzu eine Basis darstellen. Zukünftige Untersuchungen sollten sich auf einen praxisgerechten Bemessungsansatz konzentrieren. Analog zu den schüttgutspezifischen Kennwerten für die Teilflächenlast können bei dem vorgeschlagenen Ansatz für Weizen die Vorkoeffizienten (Gleichung 6.6) durch Grenzbetrachtungen festgelegt werden, um die Streubreite der Schüttgutparameter abzudecken. Wünschenswert sind experimentelle Untersuchungen an verschiedenen Schüttgütern und Silogeometrien, um über die Janssen-Gleichung hinausgehenden Drucksteigerungen bzw. Druckminderungen zu quantifizieren und den vorgeschlagenen Ansatz zu validieren.

Ferner muss das per Handabstimmung gemachte Kriterium $e_{0,cr} = 0,25 d_c$ zur Abgrenzung zwischen dem Lastansatz „Teilflächenlast für kleine Exzentrizitäten“ und dem Lastansatz „Silos mit großen Exzentrizitäten“ dahingehend überprüft werden, ob die Teilflächenlast tatsächlich die Fälle $e_{0,cr} \leq 0,25 d_c$ abdeckt. Vergleichsberechnungen haben gezeigt, dass sich die Spannungsverteilungen bei einer Exzentrizität von 0,25 und 0,3 nicht wesentlich unterscheiden.

In dieser Arbeit wurden lediglich kohäsionslose Schüttgüter untersucht. Weitere Untersuchungen sollten auch kohäsive Schüttgüter erfassen, die bei ungünstiger Schacht-, Gewölbe- oder Brückenbildung eine vorherrschende Spannungsspitze hervorrufen können. Diese Fälle sind noch nicht Gegenstand der Norm. Aktuell werden erhöhte Lasten aus der dynamischen Belas-

tung durch Bodenlasterhöhungsfaktoren berücksichtigt. Die Simulation kohäsiver Schüttgüter erfordert fortgeschrittene Stoffgesetze wie die Visko-Hypoplastizität.

Das Nachbeulverhalten wird infolge Aktivierung eines Widerstandes durch das Schüttgut günstig beeinflusst. Dieser Effekt darf jedoch nicht im Regelwerk angesetzt werden, weil die Schüttgutbettung von sowohl schüttgutspezifischen Makroparametern wie dem inneren Reibungswinkel als auch Mikroparametern wie der Kornform und Korngröße abhängt und somit schwer bei rechnerischen Nachweisen zu qualifizieren ist. Bei stark exzentrischer Entleerung treten jedoch über den Umfang stark variierende Schüttgutlasten auf, infolge dessen die elastische Verformung als zusätzliche Imperfektion agiert und somit eine destabilisierende Wirkung haben könnte. Der Effekt aus der Schüttgutbettung, besonders bei exzentrischer Entleerung, sollte noch erforscht werden, um das reale Versagensverhalten dünnwandiger Silos zu identifizieren. Das in Kapitel 4.5 verwendete Modell mit Schalenelementen für die Silowand stellt eine Basis weiterer Untersuchungen dar.

Der neue Ansatz bezieht sich ausschließlich auf kreisförmige Geometrien. Nicht kreisförmige Silos werden in der Norm größtenteils ausgeschlossen oder nur unzureichend behandelt. Für den Lastfall Entleeren kann zwar die Teilflächenlast für nicht kreisförmige Silos angewendet werden, es existiert jedoch noch kein Bemessungsverfahren für den Lastfall „große Exzentrizität“. Es bedarf somit einer grundlegenden Untersuchung von nicht kreisförmigen Silos. Dies lässt sich problemlos mit der verwendeten ALE-Technik untersuchen.

Durch das Fitting der Ansatzfunktion mit wenigen Gliedern ist es unerlässlich, dass hohe Gradienten geglättet werden müssen. Dies führt dazu, dass die Biegebeanspruchung verringert wird. Bei dünnwandigen Silos ist diese Vereinfachung im Normalfall gerechtfertigt, da die Membranspannungen bemessungsrelevant sind. Mit wandernden exzentrischen Fließkanälen durch ein segmentweises Entleeren oder einen rotierenden Arm können die vorzeichenwechselnden Biegemomente bei ungünstiger Abfolge zu ermüdungsrelevanten Bemessungssituationen führen. Die Auswirkung des neuen Ansatzes auf Betonsilos sollte daraufhin überprüft werden, ob es erforderlich ist, zusätzliche Lasten in Form von Teilflächenlasten oder Linienlasten neben dem vorgeschlagenen Ansatz anzusetzen, um die lokalen Biegemomente und Querkräfte ausreichend zu berücksichtigen.

Literatur

ABAQUS (2014): *Manuals, Version 6.14 Dassault Systèmes*.

AI, J.; CHEN, J. F.; ROTTER, J. M. & OOI, J. Y. (2011): „Numerical and experimental studies of the base pressures beneath stockpiles“. In: *Granular Matter*, Vol. 13, Nr. 2, S. 133–141.

ALTENBACH, H. (2012): *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 2. Aufl. Berlin: Springer Vieweg.

ARTONI, R.; SANTOMASO, A. & CANU, P. (2009): „Simulation of dense granular flows: Dynamics of wall stress in silos“. In: *Chemical Engineering Science*, Vol. 64, Nr. 18, S. 4040–4050.

ARTONI, R.; ZUGLIANO, A.; PRIMAVERA, A.; CANU, P. & SANTOMASO, A. (2011): „Simulation of dense granular flows: Comparison with experiments“. In: *Chemical Engineering Science*, Vol. 66, Nr. 3, S. 548–557.

AS 3774 (1996): *Loads on Bulk Solids Containers: Standards Australia Committee BD/65*.

AUBRAM, D. (2013): *An arbitrary Lagrangian-Eulerian method for penetration into sand at finite deformation: Zugl.: Berlin, Techn. Univ., Diss., 2013*. Bd. 62. Veröffentlichungen des Grundbauinstitutes der Technischen Universität Berlin. Aachen: Shaker.

BAUER, E. (1992): *Zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe unter vorwiegend ödometrischer Beanspruchung*. Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe.

BENSON, D. J. (1989): „An efficient, accurate, simple ale method for nonlinear finite element programs“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 72, Nr. 3, S. 305–350.

BENSON, D. J. (1992): „Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 99, Nr. 2-3, S. 235–394.

BENSON, D. J. & OKAZAWA, S. (2004): „Contact in a multi-material Eulerian finite element formulation“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, Nr. 39-41, S. 4277–4298.

- BIENEN, B. & QIU, G. (2015): „Numerical analysis of large penetration of a cone and a large diameter footing into dense sand overlying clay“. In: *Proceedings of the 14th International Conference of International Association for Computer Methods and Recent Advances in Geomechanics, IACMAG 2014*. Bd. CD. Taylor and Francis Group, S. 883–888.
- BIENEN, B.; STANIER, S.; VULPE, C. & MAŠÍN, D. (2014): „Interface enabling constitutive models coded as user materials to be employed in explicit analysis“. Diss. Perth: The University of Western Australia.
- BÖHRNSEN, J. U. (2002): *Dynamisches Verhalten von Schüttgütern beim Entleeren aus Silos: Zugl.: Braunschweig, Techn. Univ., Diss., 2002*. Bd. 2002,45. Braunschweiger Schriften zur Mechanik. Braunschweig und Braunschweig: Mechanik-Zentrum d. Techn. Univ und UB.
- CHEN, J. F.; ROTTER, J. M.; OOI, J. Y. & ZHONG, Z. (2007): „Correlation between the flow pattern and wall pressures in a full scale experimental silo“. In: *Engineering Structures*, Vol. 29, Nr. 9, S. 2308–2320.
- CHEN, W. F. & MIZUNO, E. (1990): *Nonlinear analysis in soil mechanics: Theory and implementation*. Bd. 53. Developments in geotechnical engineering. Amsterdam: Elsevier.
- COUTO, A.; RUIZ, A. & AGUADO, P. J. (2012): „Design and instrumentation of a mid-size test station for measuring static and dynamic pressures in silos under different conditions – Part I: Description“. In: *Computers and Electronics in Agriculture*, Vol. 85, S. 164–173.
- DAHLHAUS, F. (1995): *Stochastische Untersuchungen von Silobeanspruchungen*. Institut für Massivbau und Baustofftechnologie Karlsruhe: Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie. Institut für Massivbau und Baustofftechnologie.
- DIN EN 1991-4 (2010): *Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke - Teil4: Einwirkungen auf Silos und Flüssigkeitsbehälter. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.*
- DIN EN 1993-1-6 (2010): *Eurocode 1: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil 1-6: Festigkeit und Stabilität von Schalen*.
- DING, S. X.; WÓJCIK, M.; MLADEN, J. & SILVA, S. R. de (2003): „Loads on walls and inserts in mass-flow silos“. In: *Task Quarterly*, Nr. 7(5), S. 525–538.
- DONÉA, J. & HUERTA, A. (2003): *Finite element methods for flow problems*. Chichester und Hoboken, NJ: Wiley.
- DONEA, J.; HUERTA, A.; PONTHOT, J-Ph & RODRIGUEZ-FERRAN, A. (2004): *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods, Encyclopedia of computational mechanics. Vol 1. Ch 14*.
- EHMANN, S.; MORGEN, K. & RUCKENBROD, C. (2016): „Silos“. In: *Beton Kalender 2016*. Hrsg. von K. BERGMEISTER; F. FINGERLOOS & J. D. WÖRNER. Beton-Kalender. Berlin: Ernst & Sohn.

- FEISE, H. J. (1996): *Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern*. Braunschweiger Schriften zur Mechanik. Institut für Mechanische Verfahrenstechnik.
- FRESE, B. (1979): *Druckverhältnisse in zylindrischen Silozellen*. Universität Karlsruhe.
- FUCHS, V. (2014): *Numerische Modellierung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen an wellenbeaufschlagten Strukturen: Zugl.: Kassel, Univ., Diss., 2013*. Bd. 2014,2. Berichte des Instituts für Mechanik. Kassel, Hess: Kassel University Press.
- GALLEGO, E.; RUIZ, A. & AGUADO, P. J. (2015a): „Simulation of silo filling and discharge using ANSYS and comparison with experimental data“. In: *Computers and Electronics in Agriculture*, Vol. 118, S. 281–289.
- GALLEGO, E.; RUIZ, A. & AGUADO, P. J. (2015b): „Simulation of silo filling and discharge using ANSYS and comparison with experimental data“. In: *Computers and Electronics in Agriculture*, Vol. 118, S. 281–289.
- GETTEL, M. (2008): *Ersatzimperfektionen für den numerischen Beulsicherheitsnachweis stählerner Kreiszyinderschalen: Zugl.: Leipzig, Univ., Diss., 2008*. Bd. 12. Berichte aus dem Institut für Statik und Dynamik der Tragstrukturen, Universität Leipzig. Aachen: Shaker.
- GHOSH, S. & KIKUCHI, N. (1991): „An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for large deformation analysis of elastic-viscoplastic solids“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 86, Nr. 2, S. 127–188.
- GINGOLD, R. A. & MONAGHAN, J. J. (1977): „Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, Nr. 3, S. 375–389.
- GLADEN, W. (1985): *: Numerische Untersuchung der Lasten in Silozellen beim exzentrischen Entleeren*. Diss. Universität Karlsruhe.
- GOODEY, R. J.; BROWN, C. J. & ROTTER, J. M. (2006): „Predicted patterns of filling pressures in thin-walled square silos“. In: *Engineering Structures*, Vol. 28, Nr. 1, S. 109–119.
- GROSS, D.; HAUGER, W. & WRIGGERS, P. (2014): *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, numerische Methoden*. 9., aktual. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer Vieweg.
- GUDEHUS, Gerd u. a. (2008): „The soilmodels.info project“. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 32, Nr. 12, S. 1571–1572.
- HAMPE, E. (1991a): *Silos, Band1, Grundlagen*. 1.Aufl. Bd. / Erhard Hampe ; 1. Silos. Berlin: Verl. für Bauwesen.
- HAMPE, E. (1991b): *Silos, Band2, Bauwerke*. 1. Aufl. Berlin: Verl. für Bauwesen.

- HÄUSSLER, U. (1984): *Geschwindigkeits- und Spannungsfelder beim Entleeren von Silozellen*. Diss. Universität Karlsruhe.
- HERLE, I. (1997): *Hypoplastizität und Granulometrie einfacher Korngerüste*. Bd. 142. Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe.
- HIRT, C.W; AMSDEN, A.A & COOK, J.L (1974): „An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds“. In: *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, Nr. 3, S. 227–253.
- JAIN, Anil K. (1989): *Fundamentals of digital image processing*. Prentice Hall information and system sciences series. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- JANDA, A.; ZURIGUEL, I. & MAZA, D. (2012): „Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles“. In: *Physical review letters*, Vol. 108, Nr. 24, S. 248001.
- JANSSEN, H. A. (1895): „Versuche über getreidedruck in silozellen“. In: *Zeitschr. d. Vereines deutscher Ingenieure*, Vol. 39, Nr. 35, S. 1045–1049.
- JENIKE, A. W. (1967): „Denting of circular bins with eccentric drawpoints“. In: *Journal of the Structural Division*, Vol. 93, Nr. 1, S. 27–36.
- KALDENHOFF, M. (2014): „Vorlesungsunterlagen: Behälterbau“.
- KALDENHOFF, M. & RUCKENBROD, C. (2013): „: Silos und Einwirkungen auf Silos nach DIN EN 1993-4-1“. In: *Stahlbau-Kalender 2013*. Hrsg. von U. KUHLMANN. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, S. 459–522.
- KALDENHOFF, M. & SCHÜTT, J. (2004): „Schäden an Silos mit großen Entleerungsexzentrizitäten“. In: *Bauingenieur*, Nr. 79, S. 560–567.
- KAMINSKI, M. (1982): „Badania modelowe silosow na cukier (Modelluntersuchungen des Zuckersilos)“. In: *Bericht des Institutes für Bauwesen TU Wroclaw*.
- KAMINSKI, M. (1987): „Der Zuckerdruck in Silos mit nachgiebiger Wand oder nachgiebigem Boden“. In: *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 82, Nr. 2, S. 43–47.
- KAYA, H. (2016): „Bodenverschleppung und Spaltbildung infolge der Einbringung von Profilen in Dichtungsschichten aus Ton“. Dissertation. Technische Universität Hamburg-Harburg und Technische Universität Hamburg-Harburg.
- KNEBEL, K.; PEIL, U.; SCHULZ, U.; SCHWEIZERHOF, K. & UMMENHOFER, T. (2000): „Stabilität von stählernen Silozylinderschalen Stabilität von stählernen Silozylinderschalen bei Belastung mit ruhendem und bewegtem Schüttgut“. In: *Silobauwerke und ihre spezifischen Beanspruchungen*. Hrsg. von Deutsche Forschungsgemeinschaft DF. Sonderforschungsgebiete (DFG). Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.

- KNÖDEL, P. (1995): *Stabilitätsuntersuchungen an kreiszylindrischen stählernen Siloschüssen*. Diss. Universität Karlsruhe.
- KOLYMBAS, D. (1985): „A generalized hypoelastic constitutive law“. In: *Proc. XI International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Bd. 5, S. 2626.
- KOLYMBAS, D. (1988): *Eine konstitutive Theorie für Böden und andere körnige Stoffe*. Bd. 109. Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana.
- KOLYMBAS, D. & HERLE, I. (2017): „Stoffgesetze für Böden“. In: *Grundbau-Taschenbuch, Teil 1*. Hrsg. von K. J. WITT. Grundbau-Taschenbuch Ser. Newark: Wilhelm Ernst & Sohn Verlag für Architektur und Technische.
- KOTCHANOVA, I. I. (1970): „Experimental and theoretical investigations on the discharge of granular materials from bins“. In: *Powder Technology*, Vol. 4, Nr. 1, S. 32–37.
- LEHMANN, L. (1996): *Numerische Simulation der Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten: Zugl.: Braunschweig, Techn. Univ., Diss., 1996*. Bd. 25. Braunschweiger Schriften zur Mechanik. Braunschweig: Inst. für Angew. Mechanik.
- LORENZ, R. (1908): „Achsensymmetrische verzerrungen in dünnwandigen hohlzylindern“. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Vol. 52, Nr. 43, S. 1706–1713.
- MARTEN, P. & FRANKEN, H., Hrsg. (1988): *Silo-Handbuch*. Berlin: Ernst.
- MOYA, M.; GUAITA, M.; AGUADO, P. & AYUGA, F. (2006): „MECHANICAL PROPERTIES OF GRANULAR AGRICULTURAL MATERIALS, PART 2“. In: *Transactions of the ASABE*, Vol. 49, Nr. 2, S. 479–489.
- NASDALA, L. (2015): *FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik: Hintergrundinformationen, Tipps und Tricks*. 3., aktualisierte Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg.
- NEUMANN, F. (2006): *Numerische Simulation der Fließvorgänge granularer Medien in Silos bei exzentrischer Entleerung: Zugl.: Hamburg-Harburg, Techn. Univ., Arbeitsbereich Mas-sivbau, Diss., 2006*. 1. Aufl. Göttingen: Cuvillier.
- NIELSEN, J. & ANDERSEN, E. J., Hrsg. (1981): *Loads in grain silos*. 11th working session of the IAAS Committee of pipes und tanks. Wroclaw, Polen.
- NIEMUNIS, A. & HERLE, I. (1997): „Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range“. In: *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, Vol. 2, Nr. 4, S. 279–299.
- NOH, W. F. (1964): „CEL: a time-dependent, two-space-dimensional, coupled Eulerian Lag-rangian code“. In: *Methods in Computational Physics*, Vol. 3, S. 117–179.
- PESCHL, I. (1976): „Probleme der Silostatik“. In: *Haus der Technik e. V. Essen*, Nr. 386.

- QIU, G. (2012): *Coupled Eulerian Lagrangian Simulations of selected soil-structure interaction problems: Zugl.: Hamburg-Harburg, Techn. Univ., Institut für Geotechnik und Baubetrieb, Diss., 2012.* Erstaussg. Bd. 24. Veröffentlichungen des Instituts für Geotechnik und Baubetrieb. Hamburg: Techn. Univ. Hamburg-Harburg Inst. für Geotechnik und Baubetrieb.
- RAMÍREZ, A.; NIELSEN, J. & AYUGA, F. (2010): „Pressure measurements in steel silos with eccentric hoppers“. In: *Powder Technology*, Vol. 201, Nr. 1, S. 7–20.
- RIKS, E. (1979): „An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems“. In: *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 15, Nr. 7, S. 529–551.
- ROMBACH, G. A. (1991): *Schüttguteinwirkungen auf Silozellen*. Diss. Universität Karlsruhe.
- ROTTER, J. M., Hrsg. (1986): *The Analysis of Steel Bins Subject to Eccentric Discharge*. Second International Conference on Bulk Materials Storage Handling und Transportation. Australia, S. 264–271.
- ROTTER, J. M. (2001): *Guide for the economic design of circular metal silos*. London: Spon Press.
- ROTTER, J. M. (2004): „Cylindrical shells under axial compression“. In: *Buckling of thin metal shells*. Hrsg. von J. G. TENG & J. M. ROTTER. London: Spon.
- ROTTER, J. M. (2011): „Shell buckling design and assessment and the LBA-MNA methodology“. In: *Stahlbau*, Vol. 80, Nr. 11, S. 791–803.
- ROTTER, J. M. & SCHMIDT, H., Hrsg. (2013): *Buckling of steel shells: European design recommendations*. 5th edition, revised second impression, reprint revised version. ECCS. Brussels, Belgium: ECCS - European Convention for Constructional Steelwork.
- ROTTER, J. M. & TENG, J. G. (1989): „Elastic stability of cylindrical shells with weld depressions“. In: *Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, Nr. 5, S. 1244–1263.
- RUCKENBROD, C. (1995): *: Statische und dynamische Phänomene bei der Entleerung von Silozellen*. Diss. Universität Karlsruhe.
- RUCKENBROD, C. & KALDENHOFF, M. (2009): „Einwirkungen auf Silos aus Metallwerkstoffen“. In: *Stahlbau-Kalender 2009*. Hrsg. von U. KUHLMANN. Berlin: Ernst & Sohn.
- RUCKENBROD, C. & SCHLÜTER, F. H. (2006): „Silolasten nach der neuen DIN 1055–6“. In: *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 101, Nr. 3, S. 138–151.
- RUCKENBROD, C.; STECH, K. H. & GRIMALDI, T. (2011): „Hinweise zur Bemessung von Stahlbetonsilos bei exzentrischer Entleerung nach DIN EN 1991-4“. In: *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 106, Nr. 3, S. 148–159.

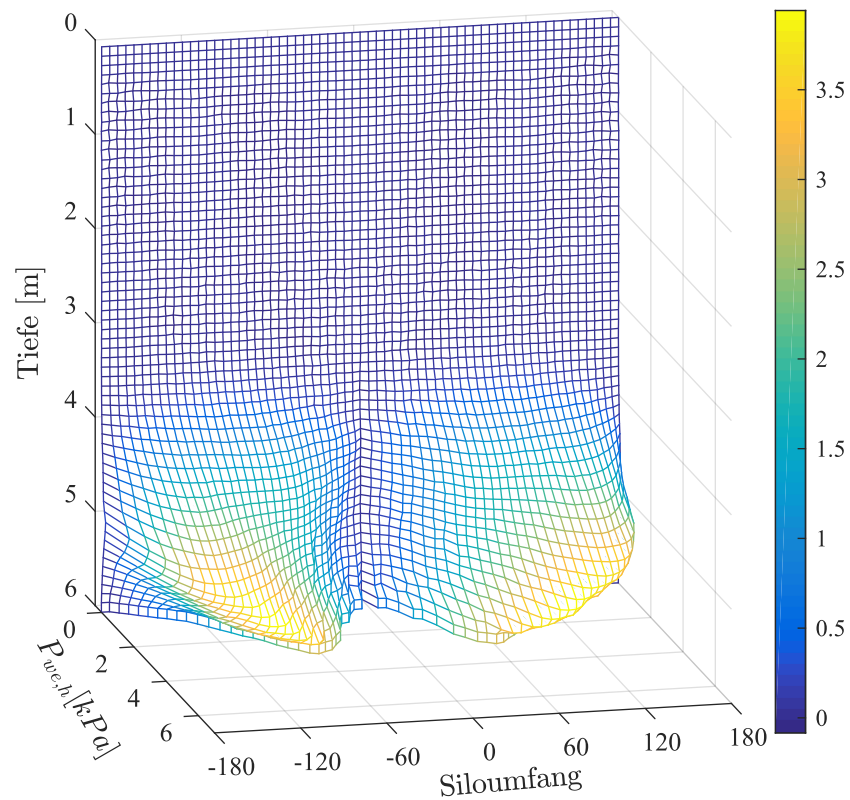
- RUIZ, A.; COUTO, A. & AGUADO, P. J. (2012): „Design and instrumentation of a mid-size test station for measuring static and dynamic pressures in silos under different conditions – Part II: Construction and validation“. In: *Computers and Electronics in Agriculture*, Vol. 85, S. 174–187.
- RUST, W. (2011): *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- SADOWSKI, A. J. & ROTTER, J. M. (2011a): „Buckling of very slender metal silos under eccentric discharge“. In: *Engineering Structures*, Vol. 33, Nr. 4, S. 1187–1194.
- SADOWSKI, A. J. & ROTTER, J. M. (2011b): „Steel silos with different aspect ratios: I ? Behaviour under concentric discharge“. In: *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 67, Nr. 10, S. 1537–1544.
- SADOWSKI, A. J. & ROTTER, J. M. (2011c): „Steel silos with different aspect ratios: II — behaviour under eccentric discharge“. In: *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 67, Nr. 10, S. 1545–1553.
- SCHENA, A. (2008): *Simulation of the Actions in Silos and Tanks with the Smooth Particles Hydrodynamics Method*. EHTC, Strasbourg.
- SCHMIDT, H. (2012): „Stahlbaunormen: Kommentar zu DIN EN 1993-1-6: Festigkeit und Stabilität von Schalen“. In: *Stahlbau Kalender 2012*. Hrsg. von U. KUHLMANN. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, S. 135–204.
- SCHNEIDER, W. (2006): „Ersatzimperfektionen für den numerischen Beulsicherheitsnachweis stählerner Schalentragwerke – State of the Art“. In: *Stahlbau*, Vol. 75, Nr. 9, S. 754–760.
- SCHNEIDER, W. & BREDE, A. (2005a): „Consistent equivalent geometric imperfections for the numerical buckling strength verification of cylindrical shells under uniform external pressure“. In: *Thin-Walled Structures*, Vol. 43, Nr. 2, S. 175–188.
- SCHNEIDER, W.; TIMMEL, I. & HÖHN, K. (2005b): „The conception of quasi-collapse-affine imperfections: A new approach to unfavourable imperfections of thin-walled shell structures“. In: *Thin-Walled Structures*, Vol. 43, Nr. 8, S. 1202–1224.
- SCHULZE, D. (2014): *Pulver und Schüttgüter*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- SFB219 (1997): „Silobauwerke und ihre spezifischen Beanspruchungen“. In: *Abschlußbericht an die DFG, Universität Karlsruhe*.
- STADLER, R. (1986): *Stationäres, schnelles Fließen von dicht gepackten trockenen und feuchten Schüttgütern*. Diss. Universität Karlsruhe.
- STAMOU, K. (1983): *Lasten in niedrigen Silos*. Technische Universität Braunschweig.
- STOKER, H. C. (1999): *Developments of the arbitrary lagrangian-eulerian method in non-linear solid mechanics applications to forming processes*. Universiteit Twente.

Literatur

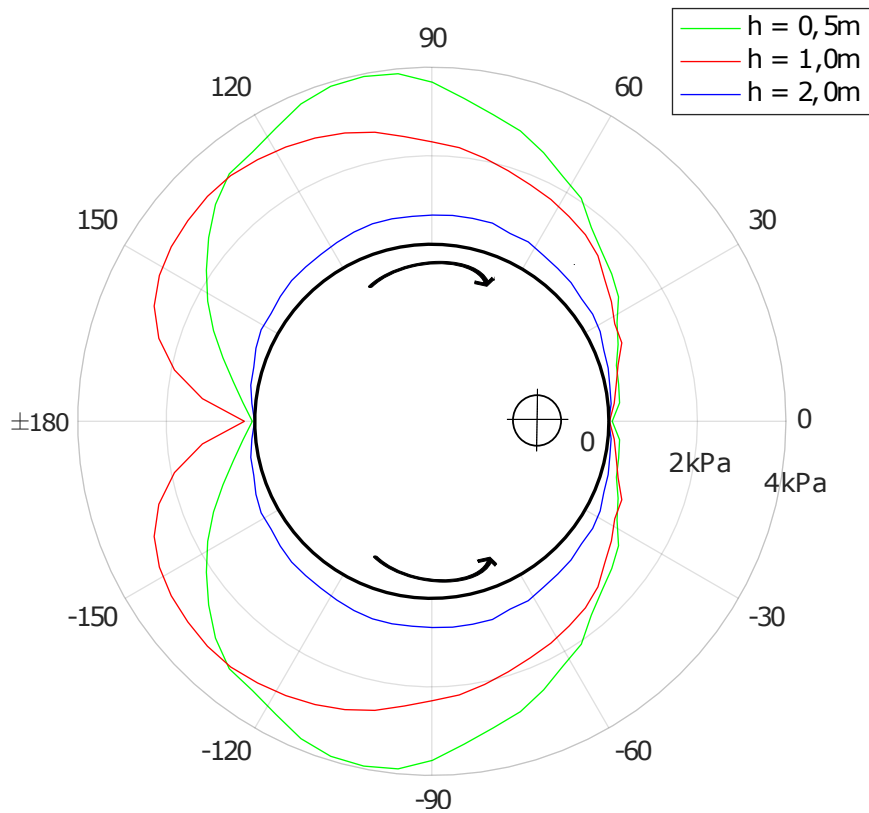
- STUTZ, H.; MAŠÍN, D.; SATTARI, A. S. & WUTTKE, F. (2017): „A general approach to model interfaces using existing soil constitutive models application to hypoplasticity“. In: *Computers and Geotechnics*, Vol. 87, S. 115–127.
- TIMOSHENKO, S. P. (1910): „Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie“. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Vol. 58, Nr. 4, S. 337.
- UMMENHOFER, T. (1996): *Stabilitätsverhalten imperfekter zylindrischer Stahlsiloschalen: Experimentelle und numerische Untersuchungen*. Berichte der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Diss. Universität Karlsruhe.
- VAN LEER, B. (1977): „Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection“. In: *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, Nr. 3, S. 276–299.
- VIDAL, P.; GUAITA, M. & AYUGA, F. (2005): „Analysis of Dynamic Discharge Pressures in Cylindrical Slender Silos with a Flat Bottom or with a Hopper: Comparison with Eurocode 1“. In: *Biosystems Engineering*, Vol. 91, Nr. 3, S. 335–348.
- WAGNER, R. (2009): *Seismisch Belastete Schüttgutsilos*. Aachen: Diss. RWTH Aachen Universität.
- WANG, P. J.; ZHU, L. & ZHU, X. L. (2016): „Flow pattern and normal pressure distribution in flat bottom silo discharged using wall outlet“. In: *Powder Technology*, Vol. 295, S. 104–114.
- WANG, Y.; LU, Y. & OOI, J. Y. (2014): „Finite element modelling of wall pressures in a cylindrical silo with conical hopper using an Arbitrary Lagrangian–Eulerian formulation“. In: *Powder Technology*, Vol. 257, S. 181–190.
- WANG, Y.; LU, Y. & OOI, J. Y. (2015a): „A numerical study of wall pressure and granular flow in a flat-bottomed silo“. In: *Powder Technology*, Vol. 282, S. 43–54.
- WANG, Y. & OOI, J. Y. (2015b): „A Study of Granular Flow in a Conical Hopper Discharge Using Discrete and Continuum Approach“. In: *Procedia Engineering*, Vol. 102, S. 765–772.
- WEIDNER, J. (1990): *Vergleich von Stoffgesetzen granularer Schüttgüter zur Silodruckermittlung*. Diss. Universität Karlsruhe.
- WINTERSTETTER, T. A. & SCHMIDT, H. (1999): *Beulversuche an längsnahtgeschweißten stählernen Kreiszyinderschalen im elastisch-plastischen Bereich unter Axialdruck, Innendruck und Torsionsschub*. Forschungsberichte des Fachbereichs Bauwesen, Universität GH Essen.
- WÓJCIK, M.; SONDEJ, M.; REJOWSKI, K. & TEJCHMAN, J. (2017): „Full-scale experiments on wheat flow in steel silo composed of corrugated walls and columns“. In: *Powder Technology*, Vol. 311, S. 537–555.

- WÓJCIK, M. & TEJCHMAN, J. (2009): „Modeling of shear localization during confined granular flow in silos within non-local hypoplasticity“. In: *Powder Technology*, Vol. 192, Nr. 3, S. 298–310.
- WÓJCIK, M. & TEJCHMAN, J. (2015): „Simulation of buckling process of cylindrical metal silos with flat sheets containing bulk solids“. In: *Thin-Walled Structures*, Vol. 93, S. 122–136.
- WOLFFERSDORFF, P.-A. von (1996): „A hypoplastic relation for granular materials with a pre-defined limit state surface“. In: *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, Vol. 1, Nr. 3, S. 251–271.
- WOOD, J.G.M., Hrsg. (1983): *The analysis of silo structures subject to eccentric discharge*. Proc., 2nd Int. Conf. on Design of Silos for Strength und Flow, Stratford-upon-Avon, S. 132–144.
- WRIGGERS, P. (2001): *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin, Heidelberg und s.l.: Springer Berlin Heidelberg.
- WU, W. (1992): *Hypoplastizität als mathematisches Modell zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe*. Bd. 129. Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe.
- ZHENG, Q. J. & YU, A. B. (2015): „Finite element investigation of the flow and stress patterns in conical hopper during discharge“. In: *Chemical Engineering Science*, Vol. 129, S. 49–57.

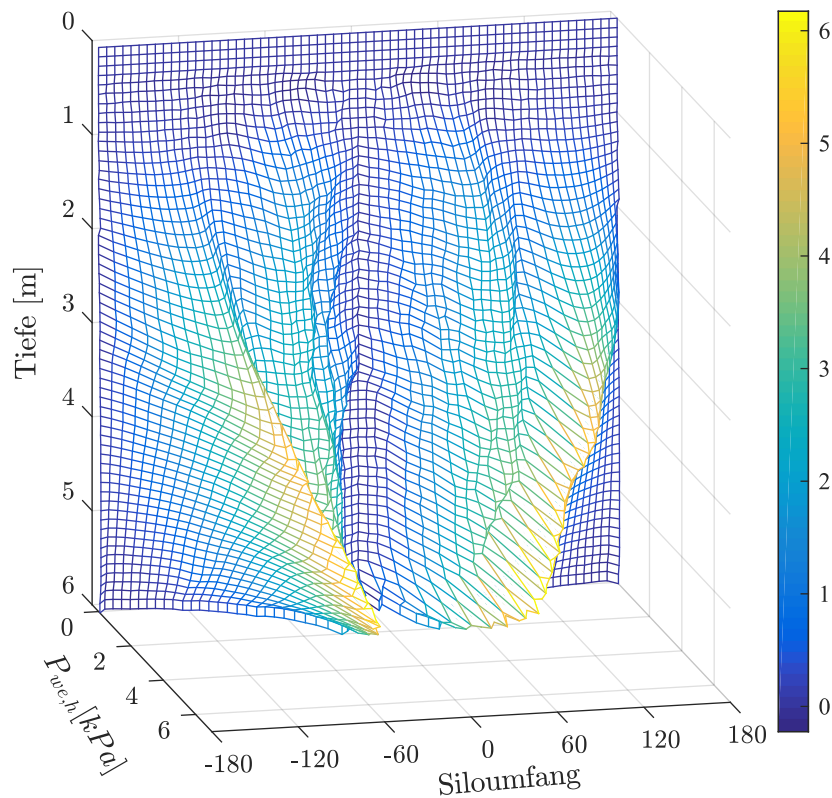
Anhang



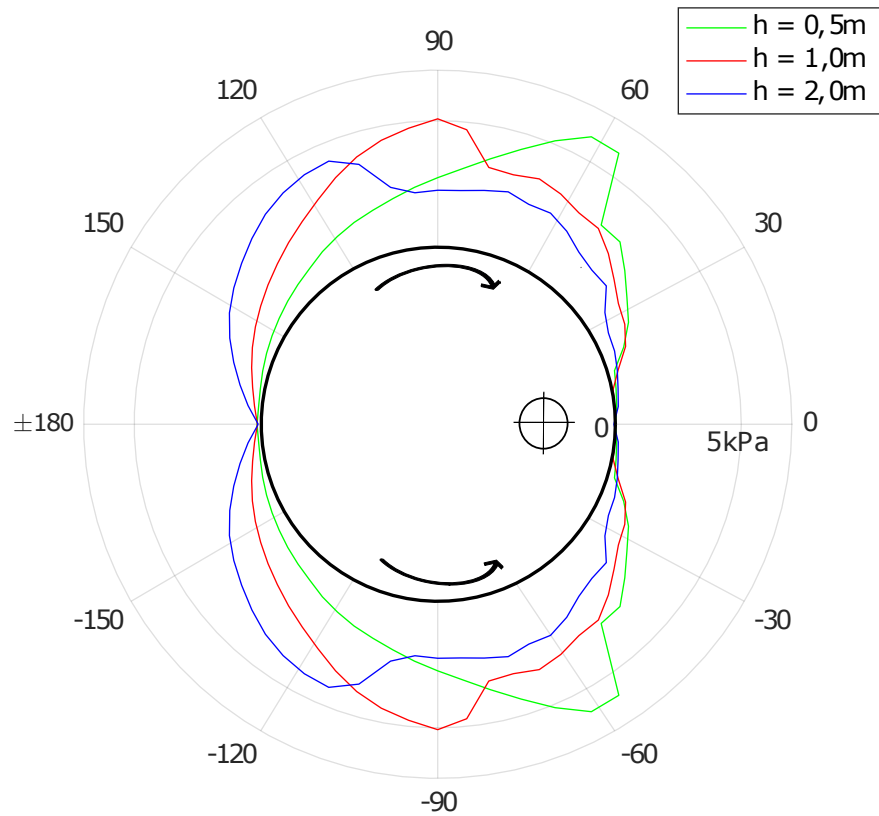
A .1: Verteilung der horizontal wirkenden Wandreibungsdrücke im stationären Zustand bei einer Exzentrizität von $e_0 = 0,3d_c$, Füllgut: Weizen



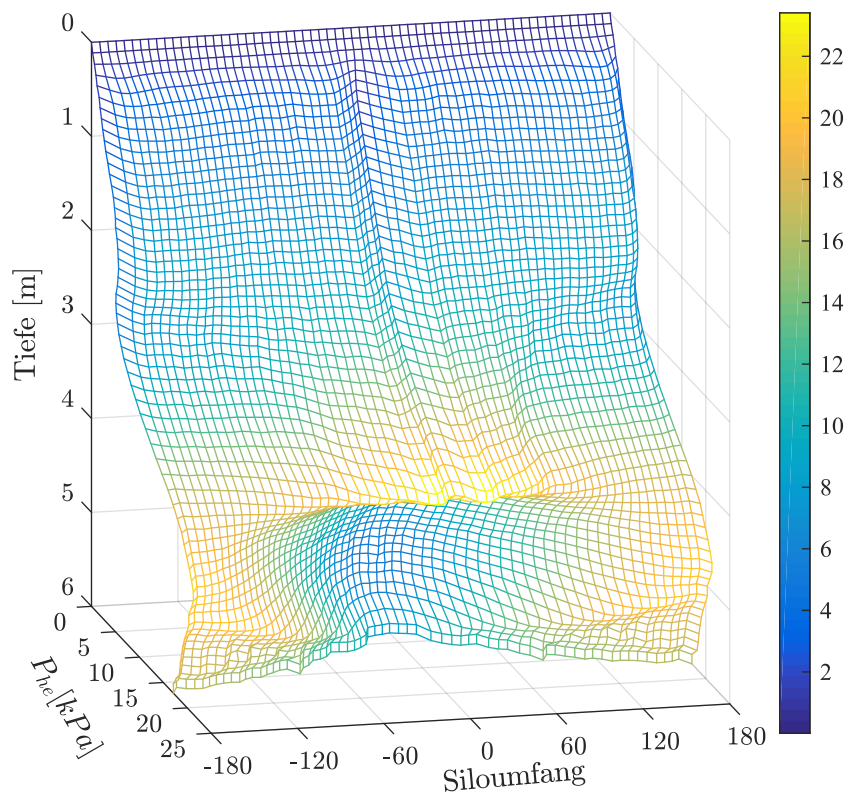
A .2: Umfangsverteilung der horizontal wirkenden Wandreibungsdücke in unterschiedlichen Höhen-schnitten bei einer Exzentrizität von $e_0 = 0,3d_c$, Füllgut: Weizen



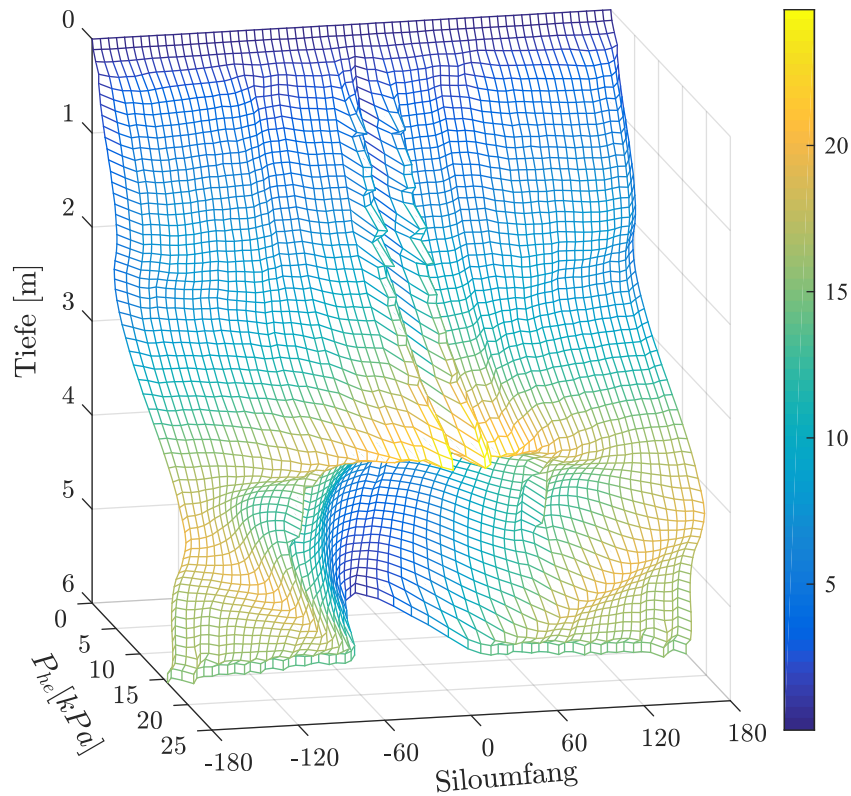
A .3: Verteilung der horizontal wirkenden Wandreibungsdücke im stationären Zustand bei einer Exzen-trizität von $e_0 = 0,3d_c$, Füllgut: Sand



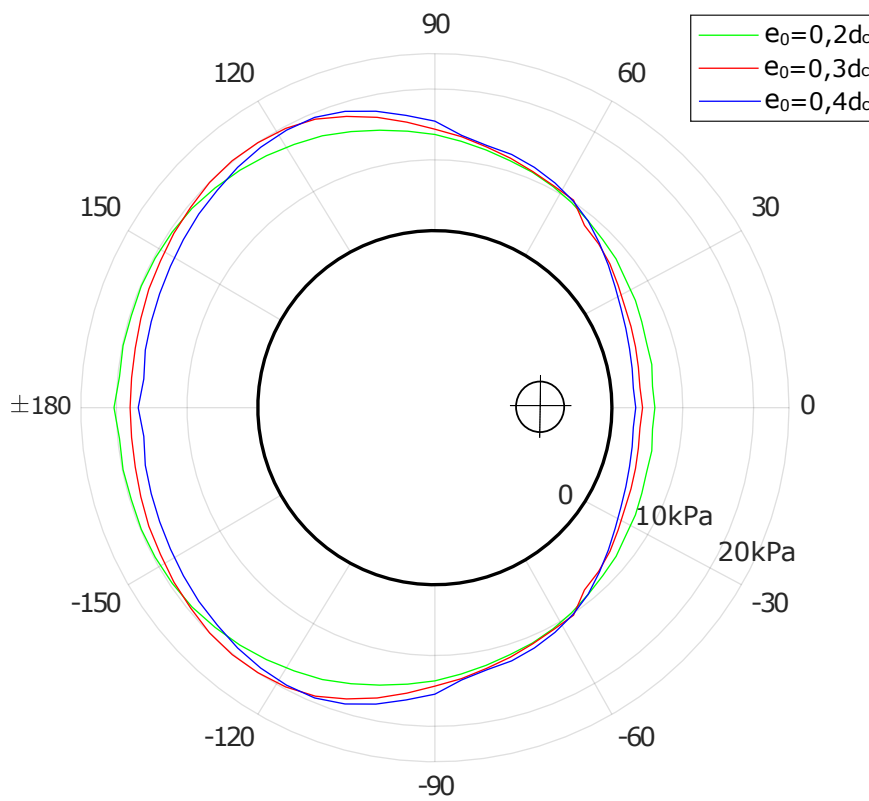
A .4: Umfangsverteilung der horizontal wirkenden Wandreibungsdücke in unterschiedlichen Höhen-schnitten bei einer Exzentrizität von $e_0 = 0,3d_c$, Füllgut: Sand



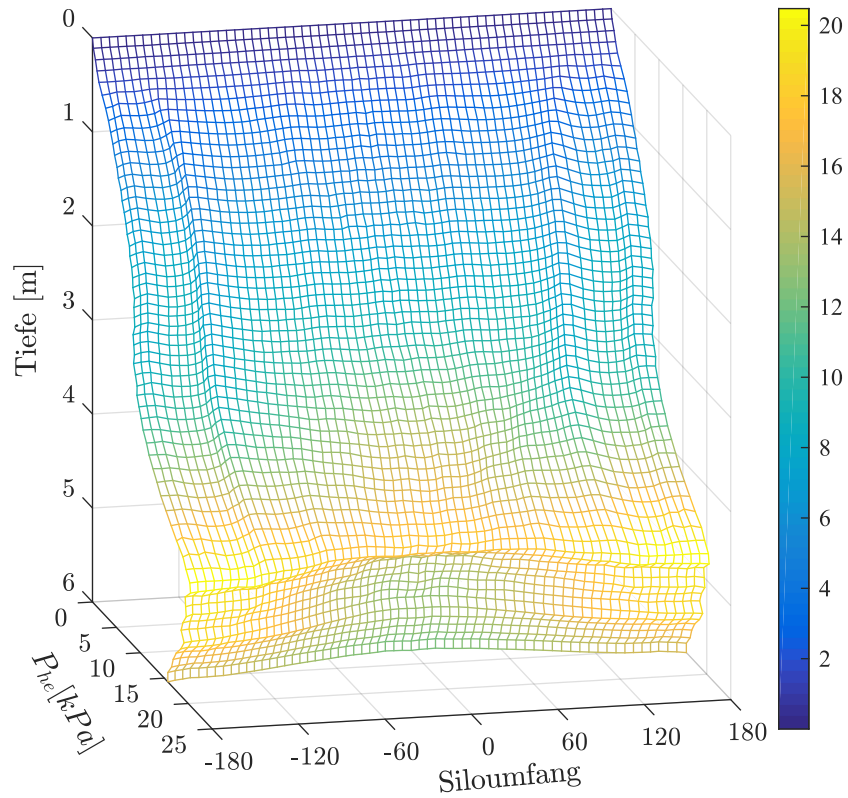
A .5: Verteilung der Horizontaldrücke im stationären Zustand bei einer Exzentrizität von $e_0 = 0,2d_c$, Füllgut: Weizen



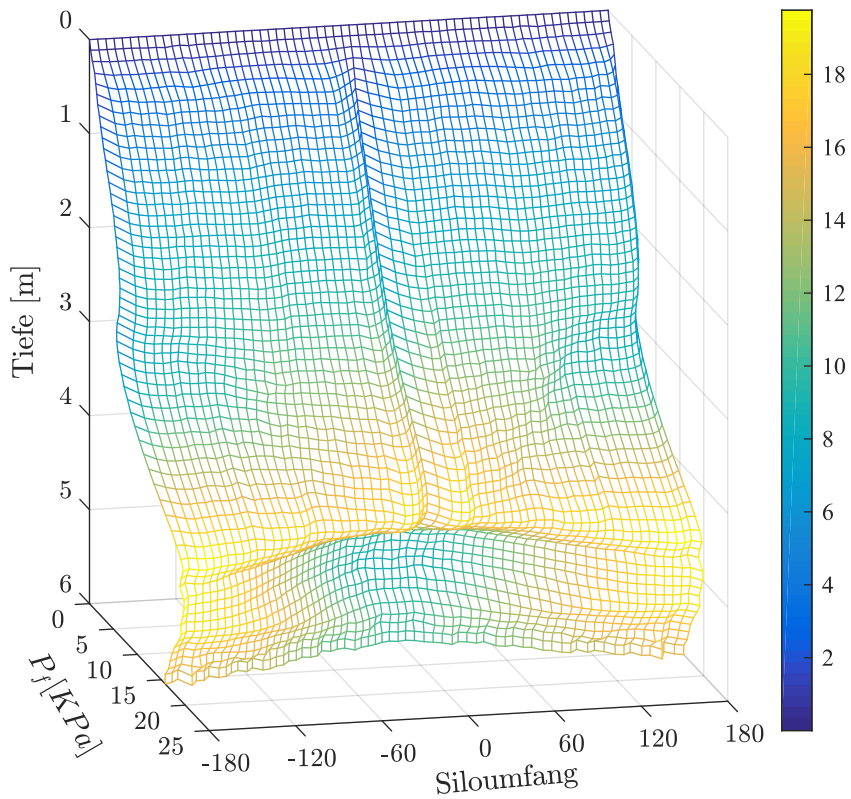
A .6: Verteilung der Horizontaldrücke im stationären Zustand bei einer Exzentrizität von $e_0 = 0,4d_c$, Füllgut: Weizen



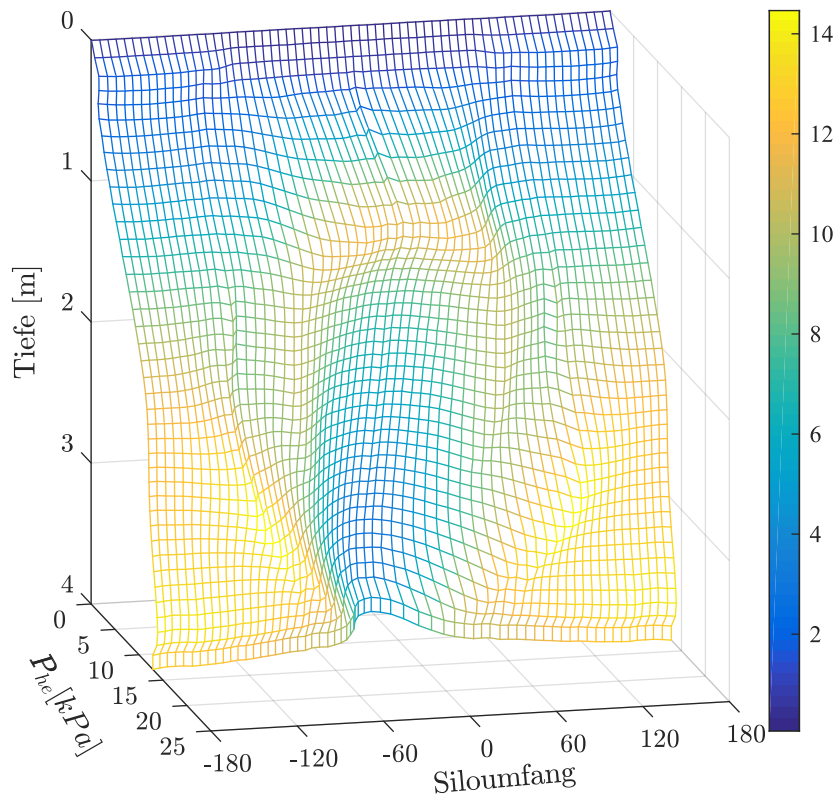
A .7: Umfangsverteilung der Horizontaldrücke 1,0 m über Boden im stationären Zustand, Füllgut: Weizen



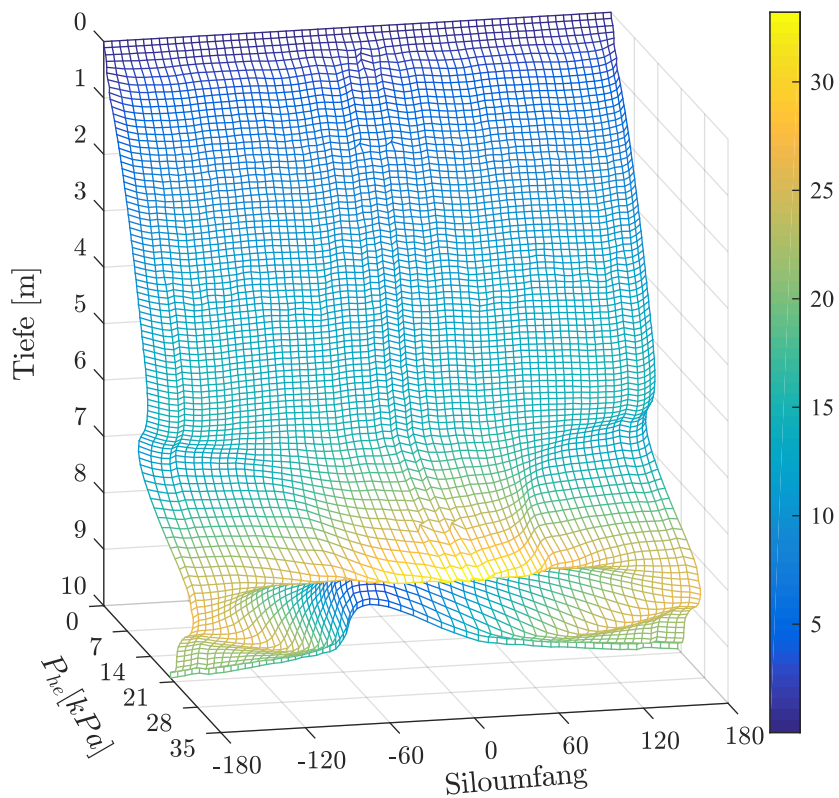
A .8: Verteilung der Horizontaldrücke im stationären Zustand bei einer Exzentrizität von $e_0 = 0,05d_c$, Füllgut: Weizen



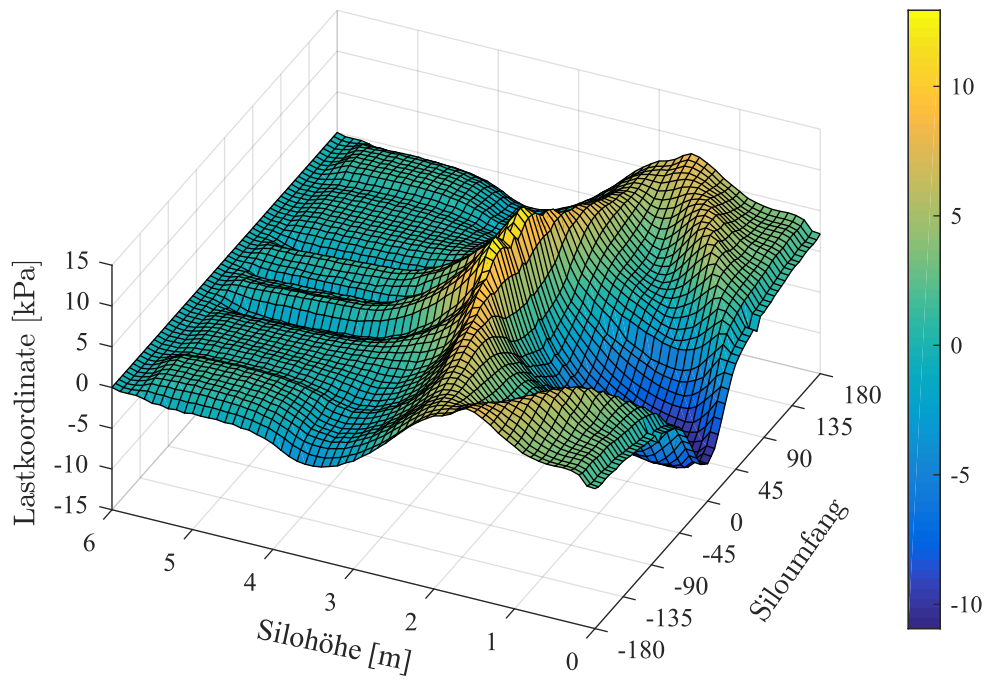
A .9: Verteilung der Horizontaldrücke im stationären Zustand bei einer Exzentrizität von $e_0 = 0,1d_c$, Füllgut: Weizen



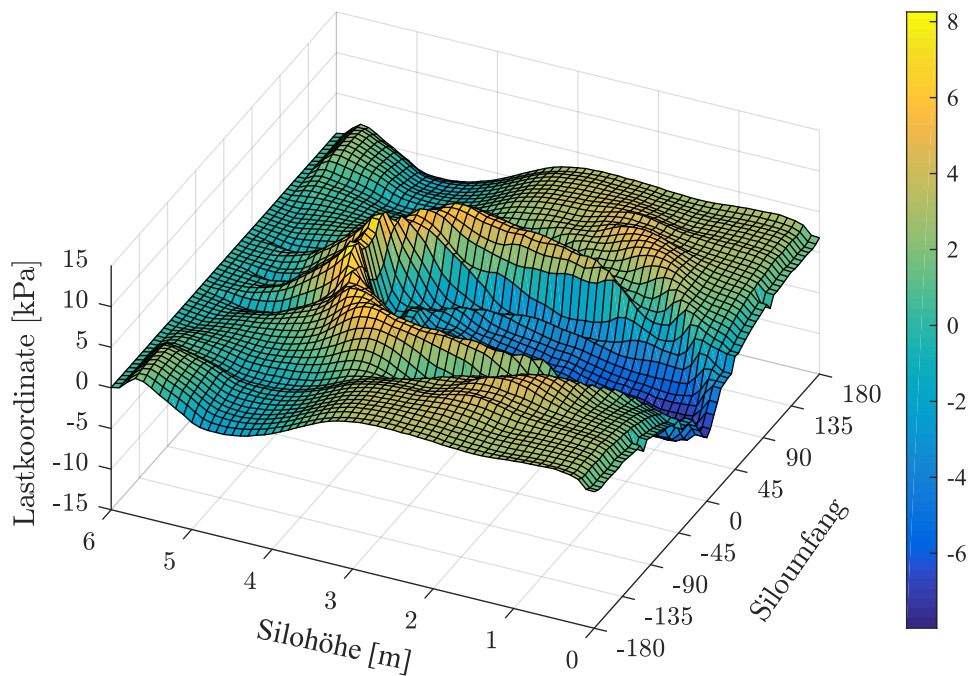
A .10: Verteilung der Horizontaldrücke im stationären Zustand bei einer Entleerungszeit von $t=8$ s, Füllgut: Weizen, $h_c/d_c = 2$



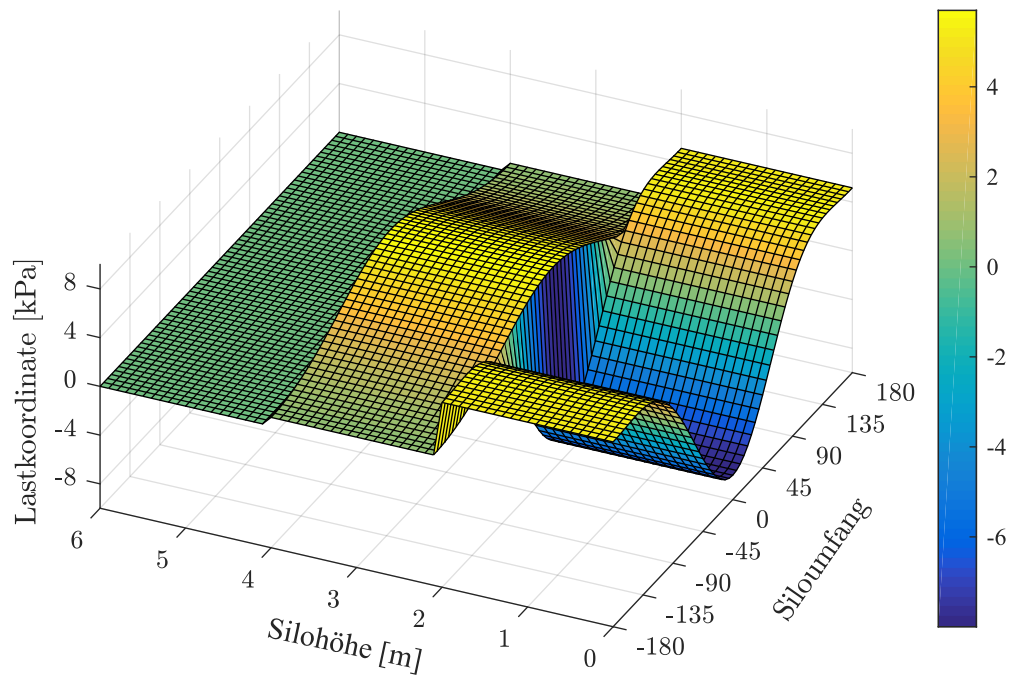
A .11: Verteilung der Horizontaldrücke im stationären Zustand bei einer Entleerungszeit von $t=15$ s, Füllgut: Weizen, $h_c/d_c = 5$



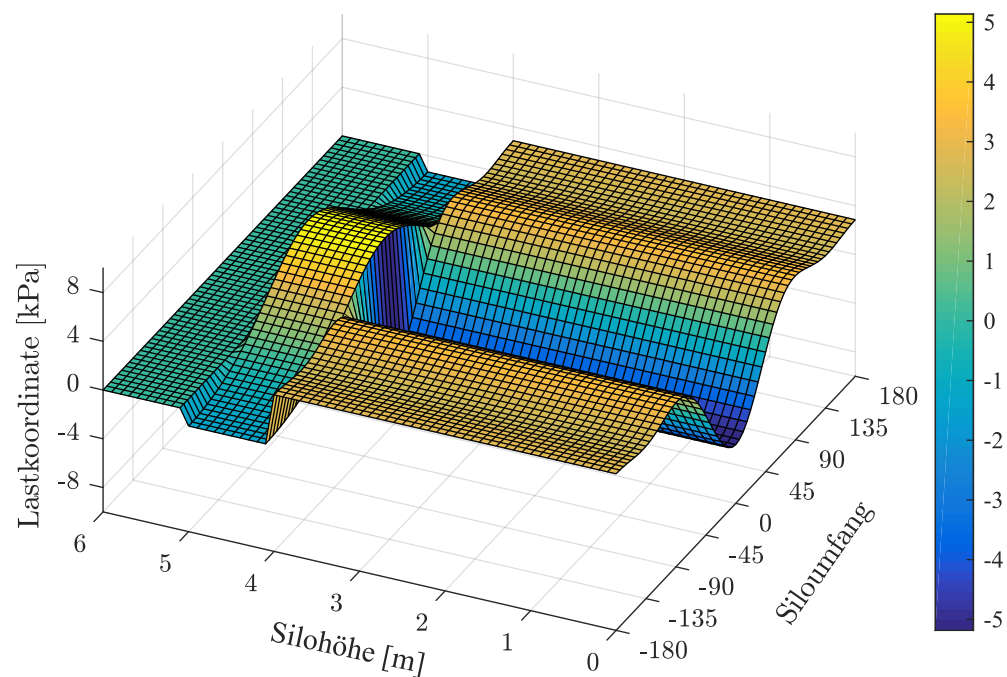
A .12: Umfangsverteilung der Horizontaldrücke aus der Exzentrizität, Füllgut: Weizen, $e_0 = 0,3d_c$, $\phi = 25^\circ$, $\mu = 0,24$



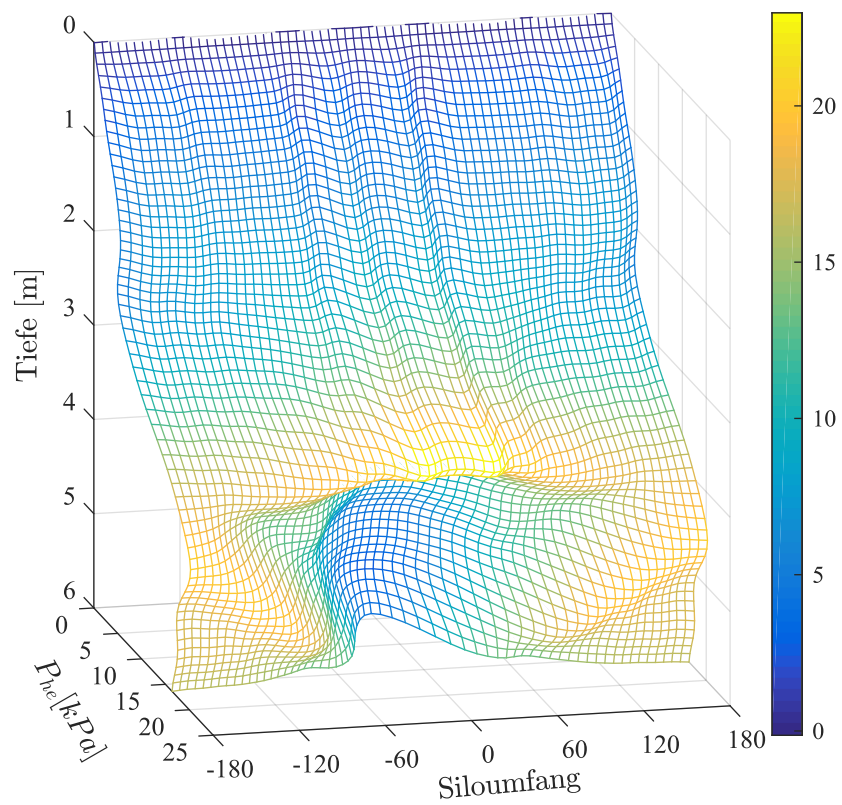
A .13: Umfangsverteilung der Horizontaldrücke aus der Exzentrizität, Füllgut: Weizen, $e_0 = 0,3d_c$, $\phi = 35^\circ$, $\mu = 0,38$



A .14: Approximierte Umfangsverteilung der Horizontaldrücke aus der Exzentrizität, Füllgut: Weizen, $e_0 = 0,3d_c$, $\phi = 25^\circ$, $\mu = 0,24$



A .15: Approximierte Umfangsverteilung der Horizontaldrücke aus der Exzentrizität, Füllgut: Weizen, $e_0 = 0,3d_c$, $\phi = 35^\circ$, $\mu = 0,38$



A .16: Mit DCT Approximierte Horizontaldruckverteilung, Füllgut: Weizen, $e_0 = 0,3d_c$, $\phi = 25^\circ$, $\mu = 0,24$